

УДК 519.9 : 519.2 : 655.2

*Р. О. Козак***МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ЗАДАЧІ ОПТИМІЗАЦІЇ ПАРАМЕТРІВ
КНИЖКОВОГО ВИДАННЯ**

Розроблено математичну модель задачі оптимізації параметрів книжкового видання в процесі його проектування, проведено аналіз стійкості отриманих розв'язків як стохастичних змінних в умовах задачі лінійного програмування.

It is designed mathematical model of the problem to optimization parameter book publishing in process of its designing, it is organized analysis to stability of the optimum decisions as stochastic variable in condition of the problem of the linear programming.

Проблема впливу параметрів видання на швидкість читання та якість сприйняття прочитаного тексту неодноразово обговорювалась у роботах, присвячених додрукарським процесам, зокрема [1, 8]. Значення цих параметрів уже готової публікації відображають задоволення вимог двох полярних критеріїв: відповідності художньому задуму видання та економічної доцільності проекту загалом. Перспективним у такому випадку є побудова та розв'язання задачі оптимізації параметрів книжкового видання.

При розв'язуванні конкретної задачі оптимізації дослідник насамперед повинен вибрати математичний метод, за допомогою якого можна отримати кінцеві результати з найменшими затратами на обчислення, або такий, що забезпечував би найбільший обсяг інформації про шуканий розв'язок [9]. Вибір того чи іншого методу значною мірою визначається постановкою оптимізаційної задачі, а також математичною моделлю об'єкта оптимізації.

Сформулюємо задачу оптимізації параметрів книжкового видання наступним чином. Нехай $\{x_i > 0; i = \overline{1, n}\}$ — вектор значень параметрів книжкового видання. Оскільки причина виникнення поточної задачі має економічне та естетичне підґрунтя, варто доповнити поняття параметр видання метричною характеристикою видання, що надаватиме прозорішого змісту позначуваній величині x_i .

З огляду на своєрідну роль метричної характеристики на шпальті, на кожній з них поставимо у відповідність деяку вагу (ціну) $c_i: \{c_i; i = \overline{1, n}\}$ — коефіцієнт, що в умовних одиницях показує затрати площі сторінки на розміщення елемента видання з даною метричною характеристикою. Для поставленої задачі складемо функцію затрат (цільову) ефективної площі сторінки при її заповненні компонентами публікації, параметри яких потрібно визначити таким чином:

$$F = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n = \bigwedge_{i=1}^n c_i x_i.$$

Між параметрами видання щодо їх взаємного розташування на сторінці існують певні числові відношення. У своїх значимих комбінаціях ці залежності подамо так:

$$\sum_{i=1}^g a_{ji} x_i = b_j,$$

де $\{b_j \geq 0; j = \overline{1, m}\}$ — вектор обмежень — відомі у конкретній постановці

задачі значення; a_{ij} — допоміжні коефіцієнти, що реально відображають відношення між метричними характеристиками одного типу.

Таким чином, ми отримали загальну задачу лінійного програмування (ЗЛП), яку запишемо у вигляді

$$\begin{aligned} & \min F = \sum_{i=1}^g c_i x_i \\ & \sum_{i=1}^g a_{ji} x_i = b_j; j = \overline{1, m}. \end{aligned}$$

Важливим інструментом підвищення ефективності чисельних методів лінійного програмування, як і в інших галузях математики, виступає врахування додаткової специфіки задачі, що розв'язується. За рахунок ускладнення логічної структури загального методу часто вдається знизити його трудомісткість і вимоги, що ставляться до потужності обчислювальних машин [3, 4].

При розв'язуванні поставленої задачі для конкретних випадків отримані результати відображають значення метричних характеристик видання, при яких затрати площі шпальти мінімізуються. Однак аналіз алгоритму розв'язку ЗЛП вказує на однобічний характер такого методу оптимізації відносно вибраного напрямку його застосування — процесу проектування видання. Суть цього недоліку полягає в тому, що проектування видання є процесом творчим, якому притаманне надання випадкових (з точки зору математичного моделювання) значень метричним характеристикам публікації. Окрім того, будучи засобом досягнення художньої цілісності макета, варіація значення хоча б одного такого параметра може призвести до отримання неприйнятних рішень для стильової довершеності. Загалом будемо вважати, що кількість факторів, які впливають на варіацію метричних характеристик, є достатньою для того, щоб на практиці їх приймати як розподілені за нормальним законом.

Тому видається цікавим сформулювати задачу оптимізації параметрів видання за умови, що вони мають стохастичну природу, та побудувати задачу аналізу стійкості в умовах задачі виду ЗЛП.

Постановка задачі аналізу стійкості є загальною для всіх груп параметрів ЗЛП, що змінюються: володіючи даними про границі інтервалів можливих відхилень параметрів і визначивши закон розподілу метричних

характеристик, відшукати можливі в даній ситуації оптимальні рішення, знайти ймовірності їх оптимальності та розрахувати показник стійкості відносно поставленої цілі [5].

Основну увагу тут планується приділити аналізу стійкості у випадку варіації параметрів цільової функції при незмінних значеннях інших груп характеристик задачі, оскільки ця ситуація є найбільш поширеною, а наслідки зміни інших параметрів неважко виправити на практиці. Крім того, зміни параметрів обмежень, згідно з теорією лінійного програмування, не впливають на структуру оптимального плану задачі, а приріст цільової функції внаслідок внесення змін до обмежень легко визначається за допомогою так званих «подвійних оцінок».

Найпоширеніший метод розв'язання ЗЛП — симплекс-метод — добре розроблений та описаний у багатьох джерелах і реалізований у пакетах прикладних програм. Однак симплекс-метод дозволяє отримати оптимальний розв'язок лише для точкових значень параметрів задачі, тоді як через дію різноманітних факторів ці параметри можуть відхилятися від точкових значень, змінюючи тим самим структуру оптимального плану [3, 4]. Тому для вирішення поставленої задачі симплекс-метод у класичному вигляді не підходить. Алгоритм потрібно вдосконалити таким чином, щоб з його допомогою можна було знаходити області стійкості всіх можливих оптимальних планів ЗЛП.

Для часткового усунення вказаного недоліку симплекс-методу було розроблено два методи, що дозволяють визначити, при яких відхиленнях параметрів цільової функції від їх точкових значень знайдений розв'язок залишається оптимальним: метод аналізу чутливості розв'язку [10] та метод параметричного програмування [2]. Наведемо їх коротку характеристику.

Метод аналізу чутливості знайденого оптимального розв'язку ЗЛП полягає в:

параметризації певного коефіцієнта цільової функції, тобто цільова

функція записується не у вигляді $Z = \sum_{j=1}^g c_j x_j$, а як $Z(t) = \sum_{j=1}^{j^*=1} c_j x_j + (c_k + t) x_k$;

розв'язанні задачі стандартним симплекс-методом відносно параметризованої цільової функції;

знаходженні області стійкості отриманого результату. Даний метод найчастіше застосовують при варіації лише одного параметра цільової функції.

Метод параметричного програмування дозволяє встановити інтервали стійкості оптимального розв'язку по всіх параметрах цільової функції й знаходити оптимальні плани задачі при відхиленнях параметрів. Однак його використовують лише у тих випадках, коли існує залежність параметрів цільової функції від деякої змінної, а цю залежність досить часто нелегко

знайти. Звідси випливає, що метод параметричного програмування не повністю розв'язує сформульовану задачу, і при його застосуванні не будуть враховані всі можливі ситуації.

Розглянемо етапи алгоритму, що його можна використати для розв'язку поставленої задачі [5]. Нижчеподана послідовність дій є комбінацією цих двох вищеописаних методів.

1. Задається закон розподілу випадкової величини параметра цільової функції.

2. Подання цільової функції у вигляді $F(\bar{x}) = \sum_{j=1}^m (a_j + t_j) x_j$, де a_j —

прогнозовані значення параметрів цільової функції; t_j — незалежні випадкові прирости.

3. Обчислення можливої кількості оптимальних планів. Нехай N — загальна кількість оптимальних розв'язків задачі, для якої справедливим є

співвідношення $N = C_m^0 + C_m^1 + C_m^2 + \dots + C_m^m$, де $C_m^k = \frac{m!}{k!(m-k)!}$.

4. Розв'язання вихідної задачі відносно всіх можливих варіантів цільової функції. Умова одночасної невід'ємності коефіцієнтів при небазисних змінних, виражених через параметри $\{t_j\}$, що їх отримано на останньому кроці симплекс-ітерації при знаходженні оптимального розв'язку X_i , визначає область стійкості плану.

5. Розрахунок ймовірності оптимальності кожного можливого розв'язку за стандартним методом аналізу стійкості, описаним вище. Цільова функція, виражена через параметри випадкових незалежних відхилень, є випадковою величиною, для котрої має місце закон розподілу ймовірностей, густина

розподілу якого є такою: $g_i(\{t_j\}) = \frac{1}{2\pi^{k/2}} \prod_{j=1}^k \frac{1}{c_{ij} s_j} \exp \left(-\frac{(c_{ij} t_j - A_j)^2}{2(c_{ij} s_j)^2} \right)$. Тоді стійкістю

відносно поставленої цілі є ймовірність події $Z(X_i, \{t_j\}) \geq a$, де a — цільовий

рівень, та обчислюється за формулою

$$P\left(Z(X_i, \{t_j\}) \geq a\right) = \frac{1}{(2\pi)^{k/2} \prod_{j=1}^k s_j} \times \prod_{j=1}^k \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{c_{ij}} \exp \left(-\frac{t_j^2}{2s_j^2} \right) \times \dots \times \prod_{j=1}^k \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{c_{ij} s_j} \exp \left(-\frac{t_j^2}{2s_j^2} \right) \times dt_k \times \dots \times dt_2 \times dt_1.$$

Таким чином, ймовірність попадання значень цільової функції при i -му оптимальному розв'язку у визначений інтервал $[a; b]$ обчислюється за формулою

$$P\left(Z\left(X_i, \{t_j\}\right) \hat{[a; b]}\right) = P\left(Z\left(X_i, \{t_j\}\right) \in b\right) - P\left(Z\left(X_i, \{t_j\}\right) \in a\right).$$

Ймовірність виконання вказівок системи в загальному визначається за формулою повної ймовірності (формула Байєса [6, 7]):

$$P\left(Z(t) \hat{[a; b]}\right) = \prod_{i=1}^n P\left(Z\left(X_i, \{t_j\}\right) \in b\right) \times P\left(Z\left(X_i, \{t_j\}\right)\right).$$

Наведена процедура дає можливість розрахувати ймовірності будь-яких результатів у процесі знаходження оптимальних метричних характеристик видання. Найбільш цікавими з цих результатів є отримання значень параметрів, сумарні значення котрих давали б найменші затрати площі шпальти публікації, з одного боку, і не ставали б руйнівними факторами стильового бачення автора (дизайнера), з другого. Ймовірності перерахованих рішень характеризують стійкість функціонування відносно тих стохастичних (випадкових) значень параметрів, які є одними з найважливіших параметрів творчого проектування видання.

Таким чином, поєднання математичного апарату лінійного програмування в його загальній формі та методів аналізу чутливості знайденого оптимального розв'язку і параметричного програмування забезпечило побудову моделі та розв'язання задачі оптимізації параметрів книжкового видання шляхом аналізу стійкості оптимальних розв'язків як стохастичних змінних в умовах ЗПП.

1. Андрійв І. В., Сеньківський В. М. Обґрунтування основних параметрів комп'ютерного формування тексту // Наукові записки: Наук.-техн. зб., Львів / УАД, 2001. Вип. 3. С. 52–57. 2. Акоф Р., Сасиєни М. Основы исследования операций. М., 1974. 3. Бойко І. В., Бублик Б. Н., Зинько П. Н. Методы и алгоритмы решения задач оптимизации. К., 1983. 4. Булавский В. А., Звягина Р. А., Яковлева М. Я. Численные методы линейного программирования / Под ред. Л. В. Канторовича. М., 1977. 5. Зубанов Н. В., Пестриков С. В. Анализ устойчивости функционирования экономических систем относительно поставленных целей. Самара, 1999. 6. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров: Пер. с англ. / Под ред. И. А. Арамановича. М., 1973. 7. Крамер Г. Математические методы статистики. М., 1975. 8. Наборные процессы и переработка текстовой информации. М., 1989. 9. Оптимизация: модели, методы, решения. Новосибирск, 1992. 10. Dennis L. B., Dennis T. D. Management science. West Publishing Company. NY, 1991.