

**ПАКОВАННЯ З ГНУЧКИХ МАТЕРІАЛІВ
(ОБҐРУНТУВАННЯ МЕТОДИКИ ДОСЛІДЖЕННЯ
ВНУТРІШНЬОГО ОБ'ЄМУ)**

Б. В. Дурняк¹, І. І. Рєгей¹, О. І. Млинко²

¹Українська академія друкарства
вул. Під Голоском, 19, Львів, 79020, Україна

²Національний університет «Львівська політехніка»
вул. Степана Бандери, 12, Львів, 79000, Україна

Акцентовано увагу на широкому використанні пакування з гнучких матеріалів, яке активно витісняє з ринку інші види. Обґрунтовано потребу в пошуку раціональної конструкції такого пакування для мінімізації використання пакувальних матеріалів та енергоресурсів для їх виготовлення. Узагальнено конструкцію засобу пакування з гнучкого матеріалу. Досліджено основний об'єм пакування та об'єм зовнішніх кишень у вигляді коноїдів, застосувавши подвійне інтегрування математичних виразів. Встановлено, що формування дна пакування у вигляді еліпса призводить до зміни геометричного розміру довжини заготовки, який відрізняється від розміру горловини. Корисний об'єм пакування з гнучких пакувальних матеріалів знайдено як різницю основного та об'єму загальної зовнішньої незаповненої кишені. На отриманих аналітичних результатах ґрунтуються подальші дослідження раціональної конструкції пакування з гнучких матеріалів.

Ключові слова: пакування, гнучкі матеріали, раціональна конструкція, еліпс, зовнішня кишень, коноїд.

Постановка проблеми. В наш час пакування відіграє ключову роль для вирішення проблеми збереження харчової продукції, її транспортування, зручного та ефективного споживання. Потенціал світового пакувального ринку величезний (> \$ 500 млрд). Як свідчать дослідження фахівців пакувальної справи, на пакування з паперу і картону припадає 42 %, полімерів — 33 % (жорсткі — 20 %, гнучкі — 13 %). Відстають засоби пакування з металу (19 %) та скла (6%) [1]. Окрім того, пакування з гнучких матеріалів сьогодні і надалі активно використовують, витісняючи з ринку інші види. Прогнозують, що у 2018 р. його світовий ринок сягне 80 млрд одиниць. Активне використання гнучкого пакування у харчовій галузі пов'язане зі зменшенням товщини матеріалів та його маси, збільшенням терміну придатності продукції внаслідок поліпшення бар'єрних властивостей пакувального матеріалу, мінімізацією відходів пакування [2]. Окрім того, різноманітне пакування з гнучких полімерних матеріалів у 4–5 разів легше за пляшки з ПЕТФ, у 5–8 разів — за банки з алюмінію, у 20–25 разів — за банки з жерсті, у 50–80 разів — за скляні пляшки [3].

Масштабне продукування пакування з гнучких матеріалів активізувало потребу в пошуку його раціональної конструкції, сьогодні важливий такий напрям, як мінімізація у використанні матеріалів, енергоресурсів для виготовлення пакування на одиницю упакованої продукції [4]. Пошук раціональної конструкції засобів пакування з гнучких матеріалів передбачає декілька етапів, важливим серед яких є математичне обґрунтування методики розрахунку їх внутрішнього об'єму.

Аналіз останніх досліджень та публікацій. У праці [5] автори розробили універсальну методику проектування картонного пакування призматичної форми з різною конструкцією закривних елементів для пакування сипкої продукції, використання якої в товарному виробництві уможливорює результативну економію пакувального матеріалу. На результатах дослідження ґрунтуються оптимізовані витрати пакувального матеріалу на виготовлення картонних пачок різної конструкції. Для пакування рідкої продукції широко використовують, окрім пластикової, скляної та металевої тари, пакування з комбінованих матеріалів на основі картону. Як стверджує автор праці [6], потреба великих обсягів його споживання першочергово вимагає економного використання пакувальних матеріалів. Важливо його реалізовувати ще на стадії проектування шляхом обґрунтування раціональних геометричних параметрів тари. У цьому дослідженні обґрунтовано математичні залежності для оптимізації геометричних параметрів, а також встановлено, що для економного витрачання матеріалів пакування різної місткості, окрім розміру корпусу за висотою, повинні різнитися й розмірами дна.

Як видно з аналізу праць, дослідження авторів стосуються напівжорсткого пакування, що зберігає свою форму. За результатами аналізу публікацій не виявлено ґрунтовних досліджень з пошуку раціональної форми гнучкого пакування для отримання результативної економії пакувальних матеріалів.

Мета статті — запропонувати методику розрахунку внутрішнього об'єму пакування з гнучких пакувальних матеріалів, що є важливою складовою в проектуванні його раціональної конструкції для вирішення важливого виробничого завдання, пов'язаного зі створенням нових засобів пакування та зі здійсненням оперативного аналізу конструкції сучасної тари для подальшого коректування її геометричних параметрів.

Виклад основного матеріалу дослідження. Попит на засоби пакування з гнучких матеріалів можна пояснити наявністю специфічних споживчих функцій, що пов'язані з його герметичністю, зручністю зберігання, дозуванням у широкому діапазоні. Доступ до запакованої продукції може бути реалізований за допомогою невеликого отвору в горловині, на яку нагвинчують корок, або спеціальної застібки «блискавки» вздовж усієї горловини [7].

Заготовка пакування являє собою частину стрічкового пакувального матеріалу, яка складається з переднього 1 (рис. 1 а) та заднього 2 елементів, з'єднаних сфальцьованим матеріалом 3 дна. Геометричні параметри такого засобу пакування визначають ширина l , висота h та ширина $2b$. Після термічного зварювання переднього 1 та заднього 2 елементів уздовж вертикальних бокових та нижніх горизонтальних країв отримують пакування з прямолінійною горловиною A (рис. 1 б) та

дном D за формою еліпса. Окрім того, виготовлення дна пов'язане з формуванням лівої $ЛК$ та правої $ПК$ зовнішніх кишень.

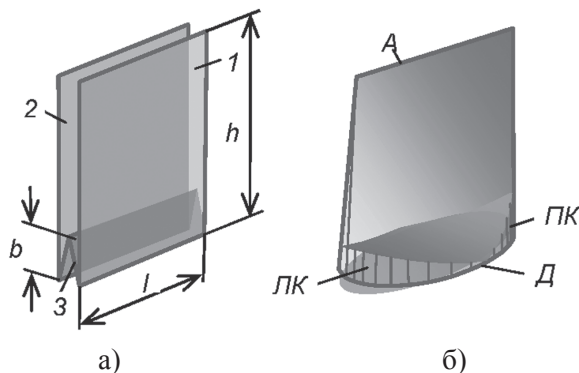


Рис. 1. Пакування з гнучкого матеріалу: конструкція заготовки (а); форма засобу пакування (б)

Дослідження основного об'єму пакування

Проведемо дослідження внутрішнього об'єму пакування з гнучкого матеріалу, відповідно до його геометричних параметрів. Виразимо основний об'єм пакування [8]:

$$V_o = \int_a^b S(x) dx, \quad (1)$$

де $a \leq x \leq b$, а $S(x)$ — неперервна функція, що виражає площу пакування, отриманого умовним його перерізом площиною, перпендикулярною до осі x (рис. 2). Площина, паралельна площині yOz (рис. 2), що проходить через точку $x=x_i$ ($a < x_i < b$), перетинає поверхню пакування по еліпсу, рівняння якого:

$$\frac{y^2}{l_i^2} + \frac{z^2}{b_i^2} = 1. \quad (2)$$

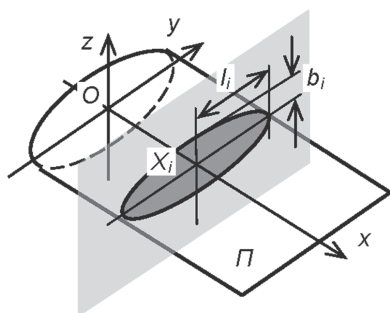


Рис. 2. Схема взаємного розміщення пакування та координатних осей

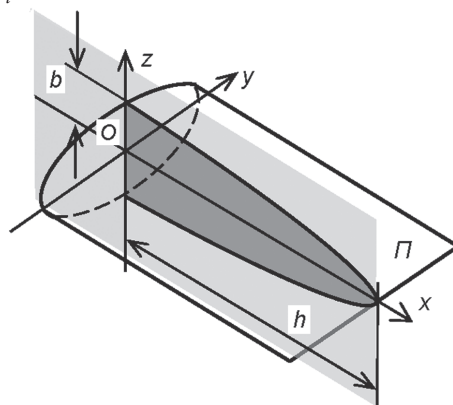


Рис. 3. Схема перетину пакування площиною xOz

Відповідно до конструкції пакування піввісь l_i еліпса зберігає умовно постійне значення, а величина півосі b_i є змінною. Дослідимо залежність параметра b_i від зміни координати x . Перетин пакування площиною xOz є половина обводу еліпса (рис 3). Рівняння кривої запишемо у вигляді:

$$\frac{x^2}{h^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1. \quad (3)$$

З виразу (3) отримуємо:

$$z = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{h^2}}. \quad (4)$$

Оскільки у площині yOz піввісь b_i є величиною змінною, то з урахуванням $b_i = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{h^2}}$ вираз (2) набуває вигляду:

$$\frac{y^2}{l_i^2} + \frac{z^2}{b^2 \left(1 - \frac{x^2}{h^2}\right)} = 1. \quad (5)$$

Беручи до уваги, що

$$S_e = \pi \cdot l_i \cdot b_i = \pi \cdot l_i \cdot b\sqrt{1 - \frac{x^2}{h^2}},$$

основний об'єм пакування:

$$V_o = \pi \cdot l_i \cdot b \int_0^h \sqrt{1 - \frac{x^2}{h^2}} dx. \quad (6)$$

Введемо позначення $I = \int_0^h \sqrt{1 - \frac{x^2}{h^2}} dx$ та обчислимо його значення:

$$I = \int_0^h \sqrt{1 - \frac{x^2}{h^2}} dx = -\int_0^h \sqrt{1 - \frac{x^2}{h^2}} dx + h \int_0^h \frac{d\frac{x}{h}}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{h^2}}}.$$

$$\text{Оскільки } 2I = h \int_0^h \frac{d\left(\frac{x}{h}\right)}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{h^2}}} = h(\arcsin 1 - \arcsin 0) = h\frac{\pi}{2}, \text{ то } V_o = \frac{\pi^2}{4} l_i \cdot b \cdot h. \quad (7)$$

Формування дна пакування у вигляді еліпса призводить до зміни геометрично-го розміру довжини заготовки в цій частині (див. рис. 4). Якщо половина довжини

становить $0,5l$, то горизонтальну піввісь еліпса знайдемо з виразу довжини його дуги за однією із наближених формул [11, 12]:

$$L = \pi \left[3(l_1 + b) - \sqrt{(3l_1 + b)(l_1 + 3b)} \right]. \quad (8)$$

З останнього виразу знаходимо:

$$l_1 = \frac{1}{6} \left[\frac{3L}{\pi} - 4b + \sqrt{-20b^2 + \frac{3L^2}{\pi^2} + \frac{12b \cdot L}{\pi}} \right]. \quad (9)$$

Враховуючи, що $L = 2l$, отримуємо:

$$l_1 = \frac{1}{3} \left[\frac{3l}{\pi} - 2b + \sqrt{-5b^2 + \frac{3l^2}{\pi^2} + \frac{6b \cdot l}{\pi}} \right]. \quad (10)$$

Тоді середнє значення горизонтальної півосі еліпса:

$$l_i = \frac{0,5l + l_1}{2} = \frac{1}{4}l + \frac{1}{6} \left[\frac{3l}{\pi} - 2b + \sqrt{-5b^2 + \frac{3l^2}{\pi^2} + \frac{6b \cdot l}{\pi}} \right]. \quad (11)$$

З урахуванням (11) основний об'єм пакування:

$$V_o = \frac{\pi^2}{4} \left\{ \frac{1}{4}l + \frac{1}{6} \left[\frac{3l}{\pi} - 2b + \sqrt{-5b^2 + \frac{3l^2}{\pi^2} + \frac{6b \cdot l}{\pi}} \right] \right\} \cdot b \cdot h. \quad (12)$$

Дослідження об'єму зовнішніх кишень пакування

Поверхня, що утворюється при «формуванні» дна пакування, є розгорнутою лінійчатою, поверхнею всеможливих дотичних до деякої гладкої просторової кривої. Загальне рівняння такої поверхні $\vec{r}(u, v) = \vec{r}_n(u) + v\vec{\tau}(u)$ вимагає використання відомого рівняння напрямної кривої $\vec{r}_n(u)$ [11], а це в нашому випадку досить складно ($\vec{\tau}(u)$ — одиничний вектор дотичної до кривої $\vec{r}_n(u)$). Тому будемо апроксимувати

фрагмент утворюваної поверхні ABCD дна пакування фрагментом коніодальної поверхні Φ (рис. 5), оскільки рівняння кривої CD та прямої AB можемо аналітично описати.

Площиною паралелізму оберемо площину xOz . При русі твірної лінії AD по напрямних AB і DC отримуємо лінійчату поверхню коніода Φ .

Розглянемо аналітичний спосіб формоутворення коніодальної поверхні. Площину паралелізму задамо одиничним вектором нормалі $\vec{n} = \{0; 1; 0\}$. Прямую AB і криву DC задамо векторним рівнянням:

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_0 + \vec{l}t$$

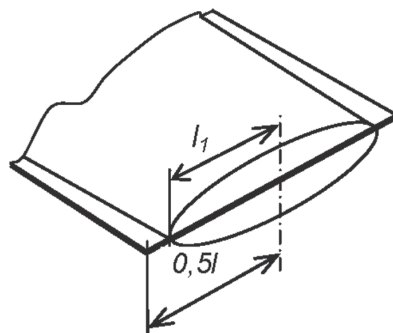


Рис. 4. Схема до розрахунку горизонтальної півосі еліпса

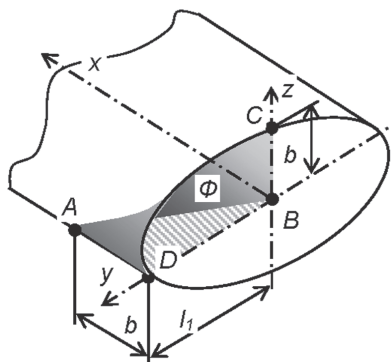


Рис. 5. Схема до розрахунку об'єму фрагмента зовнішньої кишені пакування

та

$$\vec{r}_2 = \vec{r}_2(u),$$

де $\vec{r}_1$ — радіус-вектор довільної точки на прямій, а $\vec{r}_2$ — радіус-вектор точки кривої.

Відповідно до координат точок отримаємо рівняння прямої AB :

$$\frac{x}{b} = \frac{y}{l_1} = \frac{z}{0}. \quad (13)$$

Останнє рівняння запишемо у параметричному вигляді:

$$\begin{cases} x = bt \\ y = l_1 t, \\ z = 0 \end{cases} \quad (14)$$

та у векторному:

$$\vec{r}_1(t) = \{bt; l_1 t; 0\}, \quad (15)$$

де $\vec{r}_1(t)$ — радіус-вектор точки на прямій.

Запишемо векторне рівняння кривої DC . Нехай $\vec{r}_2(u)$ — радіус-вектор довільної точки на еліпсі. Тоді

$$\vec{r}_2(u) = \{0; l_1 \cdot \cos u; b \cdot \sin u\}. \quad (16)$$

В останньому виразі $0 \leq u \leq \frac{\pi}{2}$.

Відповідність між параметрами t і u встановимо з умови паралельності твірної коноїда до площини паралелізму [11]:

$$[\vec{r}_1(t) - \vec{r}_2(u)]\vec{n} = 0, \quad (17)$$

або

$$\vec{r}_1(t) - \vec{r}_2(u) = \{bt; l_1(t - \cos u); -b \cdot \sin u\}. \quad (18)$$

Оскільки $l_1(t - \cos u) = 0$, то $t = \cos u$. Для чверті еліпса $0 \leq u \leq \frac{\pi}{2}$ і $0 \leq t \leq 1$.

Рівняння коноїда можемо записати у векторному вигляді:

$$\vec{r}(u, v) = \vec{r}_2(u) + [\vec{r}_1(t(u)) - \vec{r}_2(u)]v, \quad (19)$$

де $\vec{r}(u, v)$ — вектор-функція, задана в деякій області на площині u, v .

В останньому виразі $u_1 \leq u \leq u_2$ і $0 \leq v \leq 1$.

Підставивши у (19) рівняння прямої $\vec{r}_1(t(u))$ та еліпса $\vec{r}_2(u)$, отримаємо:

$$\vec{r} = \{0; l_1 \cdot \cos u; b \cdot \sin u\} + \{b \cdot \cos u; 0; -b \cdot \sin u\}v. \quad (20)$$

Фрагмент поверхні коноїда Φ являє собою геометричне місце точок кінців векторів $\vec{r}(u, v)$, відкладених від початку координат, аргументи u і v вектор-функції називаються криволінійними координатами на Φ [9], і за умовою нашої задачі змінюються в межах $0 \leq u \leq \frac{\pi}{2}$; $0 \leq v \leq 1$.

Вираз (20) запишемо у параметричному вигляді:

$$\begin{cases} x = (b \cdot \cos u) \cdot v \\ y = l_1 \cdot \cos u. \\ z = (b \cdot \sin u)(1 - v) \end{cases} \quad (21)$$

Для обчислення об'єму тіла T скористаємося виразом [8]:

$$V = \iiint_{(T)} dT = \iiint_{(T)} dx \cdot dy \cdot dz. \quad (22)$$

Далі перейдемо до звичайного подвійного [8]:

$$V = \iint_{(S)} z \cdot dx \cdot dy = \pm \iint_{(\Delta)} C \cdot z(u; v) du \cdot dv, \quad (23)$$

де $C = \begin{vmatrix} x'_u y'_u \\ x'_v y'_v \end{vmatrix}$, або $C = \frac{D(x; y)}{D(u; v)}$.

Остаточно об'єм тіла, обмеженого фрагментом коноїда, знайдемо з вищенаведених міркувань за формулою:

$$V = \pm \iint_{(\Delta)} z(u; v) \frac{D(x; y)}{D(u; v)} du \cdot dv, \quad (24)$$

де Δ — область зміни параметрів u, v на площині змінних u і v .

Знайдемо визначник C (якобіан):

$$C = J = \begin{vmatrix} x'_u x'_v \\ y'_u y'_v \end{vmatrix}. \quad (25)$$

Отже, вираз (26) набуває вигляду:

$$J = \begin{vmatrix} -b \cdot v \cdot \sin u & b \cdot \cos u \\ -l_1 \cdot \sin u & 0 \end{vmatrix} = b \cdot l_1 \cdot \cos u \cdot \sin u. \quad (26)$$

Об'єм тіла, що обмежений фрагментом коноїда:

$$V = \pm \iint_{(\Delta)} b \cdot \sin u (1 - v) b \cdot l_1 \cdot \cos u \cdot \sin u \cdot du \cdot dv = \pm \frac{1}{6} b^2 \cdot l_1. \quad (27)$$

Оскільки знайдений об'єм становить четверту частину від об'єму загальної зовнішньої незаповненої кишені, то:

$$V_\kappa = \frac{2}{9} b^2 \left[\frac{3l}{\pi} - 2b + \sqrt{-5b^2 + \frac{3l^2}{\pi^2} + \frac{6b \cdot l}{\pi}} \right]. \quad (28)$$

Корисний об'єм пакування з гнучких пакувальних матеріалів знайдемо як різницю основного та об'єму загальної зовнішньої незаповненої кишені:

$$V_n = V_o - V_k = \frac{\pi^2 \cdot l \cdot b \cdot h}{16} + \left(\frac{\pi^2 \cdot b \cdot h}{24} - \frac{2b^2}{9} \right) \left(\frac{3l}{\pi} - 2b + \sqrt{-5b^2 + \frac{3l^2}{\pi^2} + \frac{6b \cdot l}{\pi}} \right). \quad (29)$$

Використання виразу (29) уможливило розрахунок корисного об'єму пакування з гнучких пакувальних матеріалів, відповідно до його базових геометричних параметрів: довжини l , ширини $2b$ і висоти h , та пошук раціональної його форми.

Висновки. Пакування з гнучких матеріалів завдяки широкому використанню дедалі більше витісняє з ринку інші види засобів пакування. Об'єктивними причинами активного його використання для пакування харчової продукції є зменшення товщини матеріалів, маси, збільшення терміну придатності продукції, мінімізація відходів. Широке використання такого пакування активізувало потребу в пошуку його раціональної конструкції задля мінімізації використання пакувальних матеріалів, енергоресурсів для їх виготовлення. Дослідженням конструкції засобу пакування з гнучкого матеріалу встановлено, що його осьовими перетинами взаємно перпендикулярними площинами є еліпс та його складова. Отримано математичні вирази для пошуку основного об'єму пакування та об'єму зовнішніх кишень у вигляді коноїдів. Усереднено розмір засобу пакування за довжиною, оскільки формування дна пакування у вигляді еліпса призводить до зміни геометричного розміру. Корисний об'єм пакування з гнучких пакувальних матеріалів виражено різницею основного та об'єму загальної зовнішньої незаповненої кишені.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Александров А. М. Перспективы упаковки для пищевых продуктов (от глобальных мегатрендов к практике производства). Упаковка. 2015. № 4. С. 26–30.
2. Маркетологи інформують... Упаковка. 2015. № 5. С. 17–19.
3. Мірошник І. М. Розумна упаковка допоможе нагодувати світ. Упаковка. 2015. № 6. С. 9–11.
4. Кривошей В. М. Сьогодення та майбутнє упаковки в Україні (стан та шляхи вдосконалення). Упаковка. 2006. № 1. С. 22–26.
5. Регей І. І., Млинко О. І. Оцінка ефективності використання пакувальних матеріалів (на прикладі виробництва споживчого картонного пакування). Упаковка. 2012. № 1. С. 34–36.
6. Млинко О. І. Картонне пакування для рідкої продукції (обґрунтування раціонального використання пакувального матеріалу). Упаковка. 2016. № 4. С. 25–27.
7. Шредер В. Л., Пилипенко С. Ф. Упаковка из картона. Киев : ИАЦ «Упаковка», 2004. 560 с.
8. Фихтенгольц Г. М. Основы математического анализа в 2 т. Москва : Наука, 1968. Т. 2. 463 с.
9. Розендорн Э. Р. Теория поверх остей : курс лекций. Из-во Москов. ун-та, 1972. 204 с.
10. Michon G. P. Final answers: Perimeter of an ellipse [Electronic resource]. Numericana.com [site]. URL: <http://www.numericana.com/anwer/ellipse.htm>.
11. Кривошапко С. Н. Торсовые поверхности и оболочки. Справочник. Москва : Наука, 1991. 286 с.

REFERENCES

1. Aleksandrov, A. M. (2015). Perspektivy upakovki dlia pishchevykh produktov (ot globalnykh megat-rendov k praktike proizvodstva). Upakovka, 4, 26–30 (in Russian).
2. Marketolohy informuiut... (2015). Upakovka, 5, 17–19 (in Ukrainian).
3. Miroshnyk, I. M. (2015). Rozumna upakovka dopomozhe nahoduvaty svit. Upakovka, 6, 9–11 (in Ukrainian).
4. Kryvoshei, V. M. (2016). Sohodennia ta maibutnie upakovky v Ukraini (stan ta shliakhy vdoskonalen-nia). Upakovka, 1, 22–26 (in Ukrainian).

5. Rehei, I. I. & Mlynko, O. I. (2012). Otsinka efektyvnosti vykorystannia pakuvalnykh materialiv (na prykladi vyrobnytstva spozhyvchoho kartonnoho pakovannia). Upakovka, 1, 34–36 (in Ukrainian).
6. Mlynk, O. I. (2016). Kartonne pakovannia dlia ridkoï produktsii (obgruntuvannia ratsionalnoho vykorystannia pakuvalnoho materialu). Upakovka, 4, 25–27 (in Ukrainian).
7. Shreder, V. L. & Pilipenko, S. F. (2004). Upakovka iz kartona. Kiev : IATc «Upakovka» (in Russian).
8. Fikhtengolts, G. M. (1968). Osnovy matematicheskogo analiza v 2 t. Moskva : Nauka (in Russian).
9. Rozendorn, E. R. (1972). Teoriia poverkh ostei : kurs lektcii. Iz-vo Moskov. un-ta (in Russian).
10. Michon, G. P. Final answers: Perimeter of an ellipse [Electronic resource]. Retrieved from <http://www.numericana.com/answer/ellipse.htm> (in English).
11. Krivoshapko, S. N. (1991). Torsovye poverkhnosti i obolochki. Spravochnik. Moskva : Nauka (in Russian).

PACKAGING FROM FLEXIBLE MATERIALS (METHODOLOGY GROUNDING OF INTERNAL VOLUME RESEARCH)

B. V. Durnyak¹, I. I. Rehey¹, O. I. Mlynko²

¹*Ukrainian Academy of Printing
19, Pid Holoskom St., Lviv, 79020, Ukraine*

²*Lviv Polytechnic National University
12, Stepan Bandera St., Lviv, 79000, Ukraine
regey.ivan@gmail.com*

The wide use of packaging from flexible materials, which actively displaces other kinds from the market has been emphasized in the article. The need for finding a rational design of such packaging for minimizing the use of packaging materials, energy resources for their manufacturing has been grounded. The design of packaging from flexible materials has been generalised. The basic volume of packaging and the volume of external pockets in the form of conoids have been studied, using the double integration of mathematical expressions. It has been established that the formation of the bottom of the packaging in the form of the ellipse leads to the change of the geometric size of the unit length, which differs from the neck size. The storage capacity of packaging from flexible packaging materials has been found as the difference between the main volume and the volume of the general external unfilled pocket. The further studies of rational design of packaging from flexible materials have been based on the obtained analytical results.

Keywords: *packaging, flexible materials, rational design, ellipse, external pocket, conoid.*

Стаття надійшла до редакції 21.12.2016.

Received 21.12.2016.