УДК 539.3

ВИКОРИСТАННЯ УТОЧНЕНИХ МОДЕЛЕЙ У ЗАДАЧАХ РОЗРАХУНКУ НДС ПЛИТ НА ЖОРСТКІЙ ОСНОВІ ТА ОБЛАСТЬ УТОЧНЕНЬ

О. Г. Гуртовий[1], С. О. Тинчук[1], Л. С. Угрин[2]

[1]Національний університет водного господарства та природокористування, вул. Соборна, 11, Рівне, 33028, Україна

[2]Українська академія друкарства, вул. Під Голоском, 19, Львів, 79020, Україна

Досліджено напружено-деформований стан (НДС) плит та покриттів на жорсткій основі із застосуванням уточнених моделей беззгинового НДС. Розрахункова схема поперечно навантаженої плити утворюється симетричною добудовою плити відносно поверхні її контакту з основою. Отримана плита з симетричною структурою шарів та подвійною товщиною стає двосторонньо симетрично навантаженою відносно її серединної поверхні. Отже, НДС плити є беззгиновим. Розрахунками підтверджено ефективність і точність запропонованої методики моделювання беззгинового НДС, яка дає змогу отримати розв'язки, що якісно і кількісно близькі до тривимірних.

Ключові слова: *уточнена модель, жорстка основа, поперечний зсув, поперечне обтиснення.*

Постановка проблеми. Оцінювання міцності та жорсткості різних однорідних та неоднорідних композитних, особливо багатошарових, покриттів зводиться до оцінювання їхнього НДС як плит, що контактують із основою. Це стосується розрахунку дорожнього багатошарового одягу на достатньо жорстких мостових, тунельних та інших конструкціях транспортних споруд, захисних багатошарових покриттів плоских елементів конструкцій і деталей, функціональних покриттів робочих поверхонь різного обладнання тощо. Тому актуальним є достовірне визначення НДС багатошарових плит на жорстких основах при дії поперечного навантаження.

НДС таких покриттів, зважаючи на їхню структурну неоднорідність та відносно низьку поперечну жорсткість окремих шарів, великою мірою пов'язаний із впливом деформацій поперечного зсуву та деформацій поперечного обтиснення. З цього огляду актуальною є задача уточненого моделювання НДС плит, яка б враховувала ці види деформацій. Важливим є також й оцінювання точності НДС, отриманого за уточненою моделлю.

Аналіз останніх досліджень та публікацій. Відомі уточнені моделі НДС [1, 2 та ін.], що враховують поперечні зсуви та поперечне обтиснення, зорієнтовані переважно на описання згинового НДС, тоді як у плитах на жорсткій основі переважає беззгинова складова НДС. Отже, потрібна розробка уточненої моделі, яка б з високою точністю описувала беззгинову складову НДС плити на жорсткій основі.

У роботі [3] запропоновано гіпотези та побудовано модель беззгинового деформування однорідної та шаруватої плити, яка в поєднанні з моделлю згинового деформування дає результати, що близькі до точного тривимірного розв'язку. В працях [4, 5] розглянуто структурно-континуальні моделі НДС поперечно навантажених плит, в яких ідея ітераційного моделювання [3] застосована для плит на жорсткій основі.

Мета статті — оцінити точність та доцільність підходів [3–5] до моделювання НДС плит на жорсткій основі залежно від фізико-геометричних характеристик плит.

Виклад основного матеріалу дослідження. У лінійно-пружній постановці розглядається деформування прямокутної багатошарової плити, яка опирається на жорстку основу. Шари плити є ізотропні та трансверсально-ізотропні, довільної, але сталої товщини. Замість реальної конструкції багатошарової плити (рис. 1а) запропоновано розглядати розрахункову схему плити, яка утворена симетричною добудовою відносно поверхні контакту цієї плити з основою. У цьому випадку плита буде двосторонньо симетрично навантаженою відносно серединної поверхні плити, а її товщина збільшиться вдвічі $H = 2b_n$ (рис. 1б). При цьому контакт плити з основою відповідає умовам проковзування без тертя (рис. 1б). Жорсткий контакт плити з основою запропоновано моделювати введенням додаткового абсолютно жорсткого тонкого прошарку h_0 (рис. 1в).

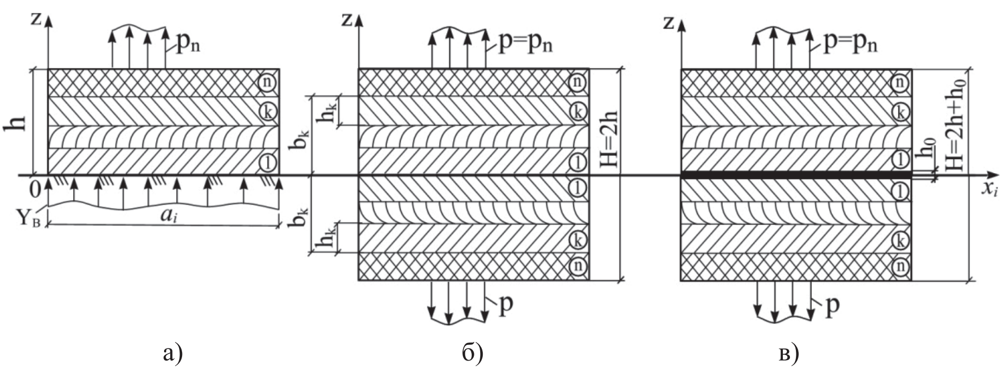


Рис. 1. Варіанти оптимізації розрахункової схеми плити

Між шарами плити виконуються умови жорсткого контакту без проковзування. Проте, вводячи тонкі прошарки малої відносної жорсткості, можна без змін у постановці задачі розглядати також інші умови міжшарового контакту.

Запропонований підхід дає змогу оптимізувати розглянуту в [4] уточнену модель НДС плити, яка складалася з двох якісно відмінних НДС — згинового і беззгинового. Згинова складова НДС зникає, оскільки НДС у симетричній за структурою плиті під час двостороннього симетричного навантаження повністю описує беззгиновий НДС. Як наслідок, кількість невідомих функцій, а отже, порядок диференціювання розрахункової системи рівнянь у задачі істотно зменшується.

У континуальній моделі [5] компоненти вектора нормальних $u_3^{(k)}$ та тангенціальних $u_i^{(k)}$ зміщень до координатної поверхні $x_1 x_2$ (рис. 1) представлені сумами добутків гіпотетично заданих степеневих функцій $\psi_t^{(k)}, \psi_{ir}^{(k)}$ поперечної координати z та шуканих функцій γ_t, β_{ir} і v_i координатної поверхні $x_1 x_2$:

$$u_3^{(k)} = \psi_{3t,3}^{(k)}(z)\gamma_t + \psi_{33,3}^{(k)}(z)p\,;\ t = \overline{1,\,2}\,;\ i = \overline{1,\,2}\,;$$

$$u_i^{(k)} = v_i - \psi_{3t}^{(k)}(z)\gamma_{t,i} - \psi_{33}^{(k)}(z)p_{,i} - \psi_{ir}^{(k)}(z)\beta_{ir}\,;\ r = \overline{1,\,4}, \tag{1}$$

де дві функції γ_t моделюють вплив поперечного обтиснення, а вісім функції β_{ir} — вплив поперечного зсуву в четвертому наближенні по кожній змінній x_i, p — функція заданого навантаження. Тут і надалі диференціювання по x_α позначено нижніми індексами після коми, а також виконується підсумовування за нижніми індексами, що повторюються.

Модель (1) зручна в тих задачах, де функція навантаження $p(x_i)$ не має розривів першого і другого роду, а отже, не суперечить принципу нерозривності переміщень $u_\alpha^{(k)}$ і принципу диференціювання функцій. В аналітичних методах розрахунку модель (1) дуже ефективна [5]. Проте в задачах, де функція навантаження має розриви, бажано замінити $p(x_i)$ в (1) невідомою функцією обтиснення. Таким чином, далі реалізується також модель у вигляді:

$$u_3^{(k)} = \psi_{3t,3}^{(k)}(z)\gamma_t\,;\ t = \overline{1,\,3}\,;$$

$$u_i^{(k)} = v_i - \psi_{3t}^{(k)}(z)\gamma_{t,i} - \psi_{ir}^{(k)}(z)\beta_{ir}\,. \tag{2}$$

Шукана функція $\gamma_3(x_i)$ — гладка і відповідає умовам нерозривності, як і функції v_i, γ_1, γ_2, β_{ir}.

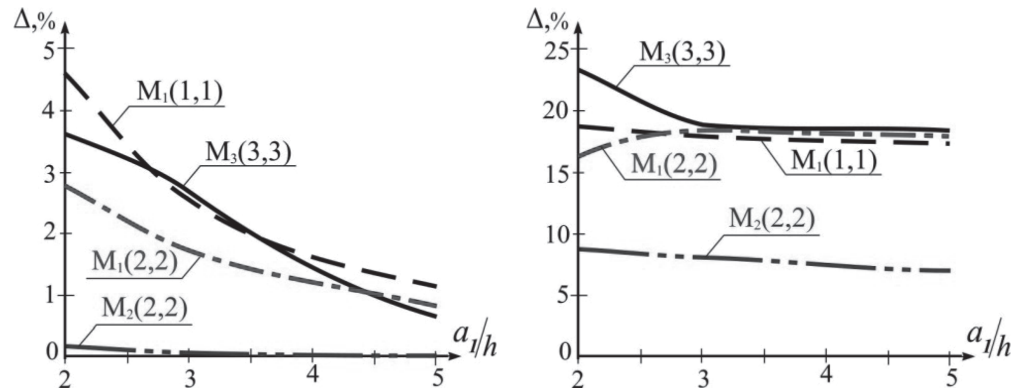
Функції $\psi_{3t}^{(k)}$, $\psi_{ir}^{(k)}$, що моделюють розподіл зміщень за координатою *z,* мають вигляд [5]:

$$\psi_{3t,3}^{(k)} = \int_0^z a_{3333}^{(s)} F_t^{(s)} dz\,;\ \psi_{33,3}^{(k)} = \int_0^z a_{3333}^{(s)} dz\,;\ t = \overline{1,\,2}\,;\ r = \overline{1,\,4}\,;$$

$$\psi_{ir}^{(k)} = -\int_0^z a_{i3i3}^{(s)} f_{ir}^{(s)} dz\,;\ \ \psi_l^{(k)} = \int_0^z \psi_{l,3}^{(s)} dz\,;\ \ s = \overline{1,\,k}\,;\ \ l = \overline{1,\,3}\,. \tag{3}$$

У виразах (3) функції $F_t^{(k)}(z)$ апроксимують розподіл напруг поперечного обтиснення σ_{33}, а функції $f_{ir}^{(k)}(z)$ — напруг поперечного зсуву σ_{i3} по висоті плити. Вони докладно описані в [5]. Розрахункова система диференціальних рівнянь і відповідні граничні умови також отримано й описано в [5].

Для обґрунтування сфери застосування запропонованих моделей залежно від розмірів плити досліджено точність розв'язків задачі плоскої деформації однорідної ізотропної плити ($\nu = 0{,}3$) на жорсткій основі (рис. 2) під дією синусоїдального навантаження $p = p_0 \sin(\pi x_1 / a_1)$. Плита розраховувалась за допомогою чотирьох варіантів уточнених запропонованих моделей, які позначено на рис. 2, 3 і в табл. 1 як M(C,S). Відповідно, $M_1(1,1)$ — оптимізована модель із заданою функцією навантаження (1), в якій утримувалась одна невідома функція поперечного обтиснення $C = 1$, та одна функція поперечного зсуву $S = 1$; $M_1(2,2)$ — модель (1) з $C = 2$, $S = 2$; $M_2(2,2)$ — оптимізована модель (2) без явної функції навантаження, коли $C = 2$, $S = 2$. $M_3(3,3)$ — загальна модель [4] для схеми на рис. 1а з $C = 3$ та $S = 3$.



а) б)

Рис. 2. Відносні похибки в уточнених розв'язках для НДС однорідної ізотропної плити:
а) в нормальних зміщеннях $u_3^{\#}$; б) в максимальних напругах $\sigma_{11}^{\#}$

Виконано порівняння з тривимірними розв'язками (Т), які отримано за методикою [6]. Введено позначення максимальних відносних зміщень $u_\alpha^{\#} = u_\alpha^{\max} E / p_0 h$ та максимальних відносних напруг $\sigma_{ii}^{\#} = \sigma_{ii}^{\max} / p_0$.

Як видно з результатів розрахунку для ізотропної плити (рис. 2), похибки в розрахунках зменшуються із зменшенням відносної товщини h / a_1. Для максимальних напруг точність моделей дещо гірша, ніж для зміщень (рис. 2). Найкращі результати для ізотропної плити отримані за $M_2(2,2)$ за оптимізованою моделлю (2) з невідомою функцією навантаження, яка дає змогу розраховувати суттєво товсті плити, майже масиви.

Для обґрунтування сфери застосування уточнених моделей залежно від фізичних параметрів досліджено вплив співвідношень пружних характеристик плити на точність розв'язків за моделями (рис. 3). Проаналізовано розв'язки для квадратної плити на жорсткій основі з крайовими умовами Нав'є під дією синусоїдального навантаження при ковзкому контакті (рис. 3., табл. 1). Матеріал плити трансверсально-ізотропний із $\nu = 0{,}3$; $\nu'' = 0{,}1$; $\nu'' / E = \nu' / E'$; $a = 3h$ ($a = 1{,}5H$). Модулі пружності та зсуву в площині ізотропії E, G, а в перпендикулярному напрямку — E', G'.

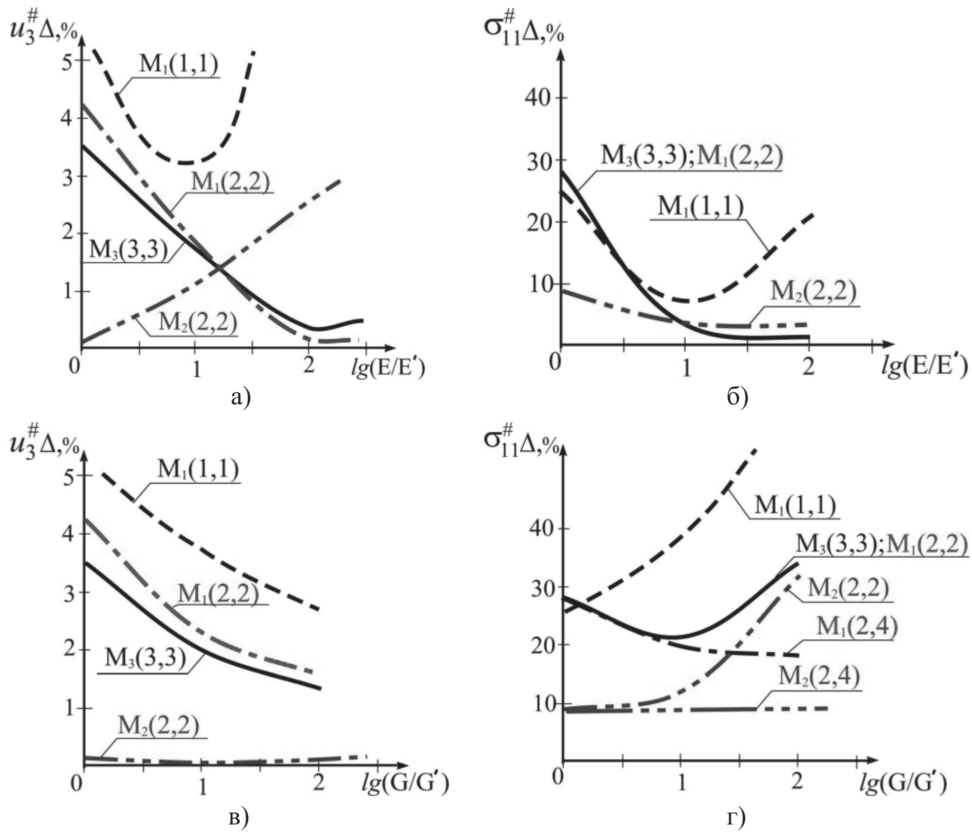


Рис. 3. Відносні похибки в НДС однорідної транстропної плити:
а), в) для нормальних зміщень $u_3^{\#}$; б), г) для максимальних напруг $\sigma_{11}^{\#}$

Таблиця 1

Порівняння максимальних зміщень $u_3^{\#}$ та максимальних напруг $\sigma_{11}^{\#}$ в квадратній плиті з тривимірним розв'язком

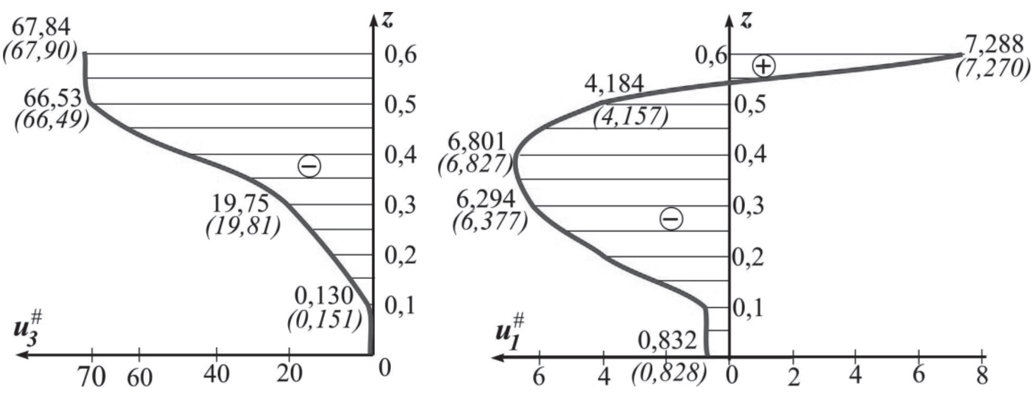
Модель	$B1=0$; $B2=0$		$B1=1$; $B2=0$		$B1=2$; $B2=0$		$B1=0$; $B2=2$	
	$u_3^{\#}$	$\sigma_{11}^{\#}$	$u_3^{\#}$	$\sigma_{11}^{\#}$	$u_3^{\#}$	$\sigma_{11}^{\#}$	$u_3^{\#}$	$\sigma_{11}^{\#}$
$M_1(1,1)$ (Δ, %)	0,906 (6,95)	0,629 (27,2)	6,406 (3,12)	2,245 (6,5)	35,97 (15)	8,40 (22,4)	0,933 (2,73)	0,390 (90)
$M_1(2,2)$ (Δ, %)	0,883 (4,2)	0,631 (27,5)	6,327 (1,85)	2,190 (3,9)	31,43 (0,74)	6,898 (0,52)	0,922 (1,57)	0,289 (41,2)
$M_2(2,2)$ (Δ, %)	0,847 (0,08)	0,540 (9,1)	6,279 (1,08)	2,183 (3,55)	30,40 (2,5)	7,069 (3,0)	0,907 (0,07)	0,270 (32)
$M_3(3,3)$ (Δ, %)	0,877 (3,5)	0,635 (28,4)	6,320 (1,74)	2,189 (3,89)	31,37 (0,54)	6,885 (0,34)	0,920 (1,3)	0,274 (34)
T	0,848	0,495	6,212	2,108	31,98	6,862	0,908	0,205

У табл. 1 введено позначення: $\lg(E/E') = B1$, $\lg(G/G') = B2$ і для трансверсальної ізотропії виконується співвідношення $\nu''/E = \nu'/E'$ при $\nu'' = 0{,}1$. Приймалось $\nu = 0{,}3$; $\nu' = 0{,}3$ для $B1 = 0$; $\nu = 0{,}3$; $\nu' = 0{,}01$ для $B1 = 1$; $\nu = 0{,}3$; $\nu' = 0{,}001$ для $B1 = 2$.

У табл. 1 в дужках показано похибки наближених розв'язків порівняно з тривимірними розв'язками *(T)*. Показано, що в надто товстих квадратних плитах, наприклад, з $a/h = 2{,}5$ чи $a/h = 3$ (табл. 1), під час зростання G/G' потрібно збільшувати кількість функцій поперечного зсуву: при $G/G' < 100$ необхідно дві функції зсуву $S = 2$ у кожному з ортогональних напрямків x_i; при $100 \le G/G' \le 500$ — $S = 3 \div 4$. При зростанні співвідношення E/E' потрібно збільшити кількість функцій поперечного обтиснення: при $E/E' \le 10$ достатньо використати одну функцію $C = 1$, при $10 \le E/E' \le 1000$ потрібно дві функції обтиснення $C = 2$. У плиті з $a/h = 5$ є можливість зменшення кількості невідомих функцій. Зауважимо, що похибки для напруг σ_{11} більші, ніж для зміщень u_α (рис. 3).

Запропоновану модель (2) — $M_2(2,2)$ використано для розрахунку квадратної ($a_i = a$) трансверсально-ізотропної тришарової плити під дією синусоїдального навантаження. Розглянуто тришарову плиту з товщинами шарів $h_1 = h_3 = h/6$; $h_2 = 2h/3$; $a_i/h = 3$ ($a_i/H = 1{,}5$). Всі шари — трансверсально-ізотропні з модулями пружності в площині ізотропії $E^{(1)} = E^{(3)} = 2.5 \cdot 10^5$ МПа; $E^{(2)} = 1 \cdot 10^4$ МПа; в поперечному напрямку $E'^{(k)}$ $G'^{(k)}$ з $E^{(k)}/E'^{(k)} = 10$; $G^{(k)}/G'^{(k)} = 1$; коефіцієнти Пуассона $\nu^{(k)} = 0{,}3$; $\nu'^{(k)} = 0{,}01$.

Отримано розподіл відносних нормальних зміщень $u_3^{\#} = u_3 E/(p_0 h)$ посередині плити ($x_i = a/2$) та відносних тангенціальних зміщень $u_1^{\#} = u_1 E/(p_0 h)$ на краю плити ($x_i = a$) (рис. 4). У дужках курсивом показано результати за тривимірним розв'язком *(T)*.



а) б)

Рис. 4. Відносні зміщення в тришаровій квадратній плиті за $M_2(2, 2)$:
а) нормальні зміщення $u_3^{\#}$; б) тангенціальні зміщення $u_i^{\#}$

Епюри відносних напруг $\sigma^{\#}_{\alpha\beta} = \sigma_{\alpha\beta}/p_0$ посередині плити ($x_i = a/2$) показано на рис. 5.

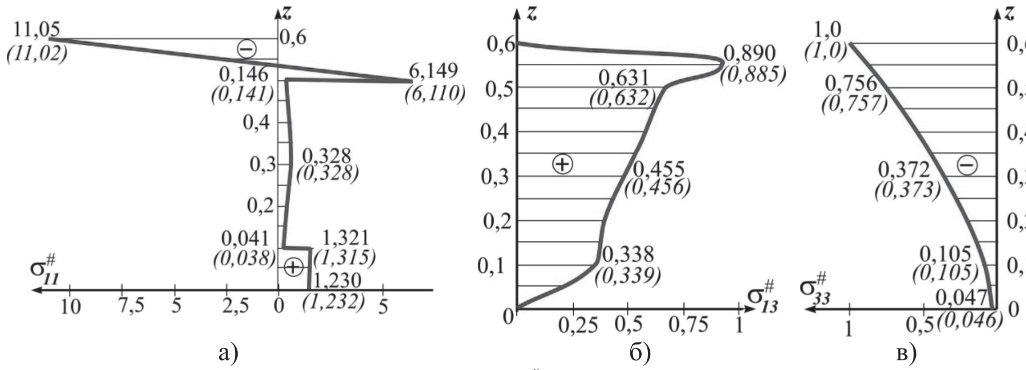


Рис. 5. Епюри відносних напруг $\sigma^{\#}_{\alpha\beta}$ в тришаровій квадратній плиті

За результатами порівняння з тривимірним розв'язком *(Т)* (рис. 4–5) видно, що запропонована оптимізована модель (2) $M_2(2, 2)$ якісно і кількісно практично точно відображає НДС у багатошаровій трансверсально-ізотропній плиті. Розрахунки такої плити за іншими варіантами запропонованих моделей із меншою кількістю шуканих функцій, тобто $M_2(1, 1)$, $M_2(2, 1)$ та $M_2(1, 2)$, дають більшу розбіжність із результатами точного розв'язку.

Висновки. Як видно з наведених результатів розрахунку тестових задач, побудована математична модель дає змогу отримувати результати, що якісно і кількісно наближаються до тривимірних розв'язків. Модель можна застосовувати для розрахунку НДС суттєво товстих плит ($a/h = 3$), при широкому діапазоні зміни параметрів відносної транстропії в шарі ($1 \le E/E' \le 500$, $1 \le G/G' \le 500$).

Потрібно відзначити, що результати розрахунків за оптимізованого підходу до формування розрахункової схеми плити з використанням моделей беззгинового НДС (M_1, M_2) та за загальною моделлю M_3, що описує як беззгиновий, так і згиновий НДС у заданій плиті, є досить близькими. Проте оптимізований підхід із моделями M_1, M_2 дає можливість отримувати достовірні результати при меншій кількості шуканих функцій та при меншому загальному порядку диференціювання розрахункової системи рівнянь.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Пискунов В. Г. Об одном варианте неклассической теории многослойных пологих оболочек и пластин. Прикладная механика. 1979. Т. 15, № 11. С.76–81.
2. Рассказов А. О. К теории многослойных ортотропных пологих оболочек. Прикладная механика. 1976. Т. 12, № 11. С. 50–56.
3. Гуртовый А. Г. Высокоточное моделирование деформирования слоистых структур. Механика композитных материалов. 1999. Т. 35, № 1. С. 13–28.
4. Гуртовий О. Г., Тинчук С. О. Задача поперечного деформування трансверсально-ізотропної плити при контакті з абсолютно жорсткою основою. Зб. наук. праць Вісник УДУВГП серія «Технічні науки». 2004. Вип. 2 (26). С. 222–229.
5. Гуртовый А. Г., Тынчук С. А. Безызгибная уточненная модель деформирования многослойных плит на недеформируемом основании. Механика композитных материалов. 2006. Т. 42, № 5. С. 643–654.

6. Пискунов В. Г., Сипетов В. С., Туйметов Ш. Ш. Решение задач статики для слоистых ортотропных плит в пространственной постановке. Прикладная механика. 1990. Т. 26, № 2. С.41–49.

REFERENCES

1. Piskunov, V. G. (1979). Ob odnom variante neclasicheskoy teorii mnogosloynykh pologykh obolochek i plastyn. Prikladnaya mekhanika, Vol. 15, 11, 76–81 (in Russian).
2. Rasskazov, A. O. (1976). K teorii mnogosloynykh ortotropnykh pologykh obolochek. Prikladnaya mekhanika, Vol. 12, 11, 50–56 (in Russian).
3. Gurtovyj, A. G. (1999). Vysokotochnoe modelirovanie deformirovaniya sloystykh struktur. Mekhanika kompozitnykh materialov, Vol. 35, 1, 13–28 (in Russian).
4. Gurtovyj, O. G. & Tynchuk, S. O. (2004). Zadacha poperechnogo deformuvannya transversalno-izotropnoyi plyty pry kontakti z absolyutno gorstkoyu osnovoyu. Zbirnyk naukovyh pracz'. Visnyk UDUVGP «Tehnichni nauky», 2(26), 222–229 (in Russian).
5. Gurtovyj, A. G. & Tynchuk, S. A. (2006). Bezyzgibnaya utochnennaya model' deformirovaniya mnogosloystykh plyt na nedeformirovanom osnovanii. Mekhanika kompozitnykh materialov, Vol. 42, 5, 643–654 (in Russian).
6. Piskunov, V. G., Sipetov, V. S. & Tuymetov, Sh. Sh. (1990). Reshenije zadach statiky dlya sloistykh ortotropnykh plyt v prostranstvennoy postanovke. Prikladnaya mekhanika, Vol. 26, 2, 41–49 (in Russian).

USE OF REFINED MODELS IN CALCULATION PROBLEMS OF SSS PLATES WITH RIGID BASE AND AREAS OF REFINEMENTS

O. G. Gurtoviy[1], S. O. Tynchuk[1], L. S. Uhryn[2]

[1]National University of Water and Environmental Engineering, 11, Soborna St., Rivne, 33028, Ukraine

[2]Ukrainian Academy of Printing, 19, Pid Holoskom St., Lviv, 79020, Ukraine lubouh@gmail.com

The stress-strain state (SSS) of plates and coatings with rigid base using refined models of unflexural SSS has been researched. The designed diagram of a transversely loaded plate is formed by supplementing it with a symmetric one about the contact surface of the base. The plate obtained with the symmetrical structure of layers and double-thickness becomes loaded bilaterally symmetrically about its median surface. Therefore, the SSS of a plate is unflexural. The calculations confirm the efficiency and accuracy of the proposed method of modeling unflexural SSS, which allows one to obtain the solutions qualitatively and quantitatively close to three-dimensional ones.

Keywords: *a refined model, rigid base, transverse shear, transverse compression.*

Стаття надійшла до редакції 11.05.2017.
Received 11.05.2017.