

УДК 686. 12

Я. Ю. Коляно, Н. В. Ковалик, О. Б. Яремчишин, І. І. Ілик

ПРОЕКТУВАННЯ ПАКОВАНЬ ПРОДУКЦІЇ ЗА ДОПОМОГОЮ ЗАДАЧ ТЕОРІЇ ЕКСТРЕМУМІВ

Розвивається методика оптимізації конструкцій пакувань канонічної (правильної геометричної) форми, яка використана і для дослідження пакувань складної форми та пакувань з урахуванням товщини пакувального матеріалу.

Methodic for optimization of the constructions of packings canonical (rectilinear geometrical) form has been evolved. This methodic has been used for investigation of packings compound form and for packings with taking into account the thickness of packing material.

1. У найближчі роки розвиток пакування набуде форми швидше революції, ніж простої еволюції, особливо, коли йдеться про споживчий ринок, продаж товарів і продуктів або екологію. Недаремно в європейських країнах створено інститути пакування (наприклад [4]). Конкретний товар необхідної якості та кількості, у визначений час і у визначеному місці, з мінімальними витратами – це і є логістика [14, 15]. Особливо сучасно й благородно звучить лозунг Всесвітньої організації пакувальників (WPO) «До кращого життя через краще пакування». Впровадженням сучасних технологій перероблення, зберігання та пакування продукції можна змінити ставлення до пакування як тимчасового товару, місце для якого після використання продукту найчастіше знаходиться лише на смітнику [9, 13]. Тут актуальним є також питання побудови заводів з переробки та утилізації відходів [20]. Наведемо деякі цифри [13]: 1 т макулатури оберігає від вирубування 17 дерев і замінює 900 кг целюлози; повторна переробка жерсті на пакування скорочує витрати енергії на 50 – 60%; перероблення лому алюмінію на новий метал і пакування з нього зменшує витрати енергії на 90 – 95%; кожні 10% склобою скорочують витрати енергії у виробництві скляної тари на 2,5%; на одну людину припадає близько 600 кг відходів за рік (ця цифра зростає); 1 м^3 на сміттєзвалищі коштує від десятків до сотень тисяч доларів США; попіл після спалювання дає майже 30% залишків, які потребують захоронення як радіоактивні відходи.

За призначенням пакування ділиться на споживче, транспортне, виробниче і консервуваче, за складом – на тару й допоміжні пакувальні засоби. За конструкцією споживча тара являє собою пачки, коробки, банки, пляшки, пакети, туби і т. ін. Транспортна тара – це ящики, барабани, відра, бочки, фляги, мішки тощо. За матеріалом тара і допоміжні пакувальні засоби діляться на паперові, картонні, металеві, полімерні і т. ін. [21, 25 – 27]. Проектуючи або вибираючи споживче пакування для продукції, слід дотримуватися не тільки всіх вимог щодо її зберігання, але й вибрати форму та габаритні геометричні розміри так, щоб воно ефективно, якнайшлішніше розміщалося в транспортному пакуванні. Це стосується і вибору транспортного пакування, яке повинно бути розташоване оптимально за вибраною схемою на стандартному за розмірами піддоні, формуючи вантажну транспортну одиницю [14]. Найважливішими вимогами торгівлі є місткість пакування, його зовнішнє оформлення і розміри, маса запакованого продукту. Ці чинники не є стабільними, а постійно уточнюються в процесі маркетингових і кон'юнктурних досліджень. Розміри споживчого, групового і транспортного пакування, використовуваного в торгівлі, повинні співвідноситися з розмірами магазинних полиць, стелажів і прилавків, тари-обладнання, торговельних контейнерів і повинні бути кратні розмірам стандартного піддона [24]. Маса транспортного пакування не повинна перевищувати 12 кг і лише у виняткових випадках може дорівнювати 20 кг [18, 19]. Конструкція пакування повинна максимально задовольняти потреби споживачів: легко відкриватися (бажано без будь-яких пристроїв) і при необхідності знову закриватися, бути стійкою й забезпечувати надійне зберігання продукту [27].

У пакувальній промисловості використовують пакування різноманітних геометричних форм, виготовлені з різних матеріалів. Понад 50% світового пакування виробляється з паперу і картону [27], причому на картон у різних країнах припадає 25 – 45% від загальної кількості усіх

інших матеріалів [13]. Основними факторами такого стабільно високого використання паперових і картонних пакувальних матеріалів для виготовлення споживчої й транспортної тари є: низькі затрати на виготовлення пакувальних матеріалів, тари і пакування; найкращі та найбільш економічні умови обігу продукції; легкість і хороші санітарно-гігієнічні властивості матеріалів; привабливий зовнішній вигляд і високі споживчі властивості пакування; відсутність шкідливих для навколишнього середовища компонентів; ефективна повторна переробка і утилізація відходів (рециклінг досягає 90% і більше) [2, 5, 7, 8, 23]. Увесь асортимент картонних матеріалів може бути розділений на три основні групи: одношаровий, багатошаровий (нашарований за типом «сандвіча»), гофрований картон [27]. Одношаровий картон застосовується в основному для споживчої тари (пачок і коробок різних конструкцій). Багатошарові матеріали на основі картону, фольги і полімерних матеріалів виготовляються шляхом ламінування картону полімерами. При цьому при температурі не вище 180°C картон не втрачає своєї міцності. Завдяки йому багатошаровий матеріал можна оформити поліграфічно, а шар поліетилену запобігає проникненню вологи. Наявність фольги дозволяє використовувати матеріал для пакування продуктів, які повинні зберігатися без доступу світла. Ці матеріали застосовуються для пакування молочних продуктів, соків, напоїв, кислих продуктів, продуктів із сої та ін. Гофрований картон є найпоширенішим, надійним і ефективним матеріалом для транспортної картонної тари, бо має суттєві переваги: придатний для багаторазового використання; володіє амортизаційними властивостями; тара з нього легша, дешевша і дозволяє автоматизувати процеси пакування продукції; тарі й пакуванню з гофрокартону характерне хороше зовнішнє оформлення; гофрокартонна тара з різними покриттями (парафін, поліетилен) запобігає проникненню вологи і може вживатися для транспортування овочів, фруктів, заморожених продуктів; полімерні вкладиші й комбіновані матеріали на основі картону надають пакуванню герметичності. При виготовленні картонної тари менші відходи утворюються тоді, коли всі грані тари мають вигляд прямокутників чи правильних многокутників [27]. Споживча тара у вигляді куба чи паралелепіпеда легко пакується і вкладається в стандартну транспортну тару. Різні застосування мають пакування циліндричної й конічної форми (банки, відра, барабани та ін.) [23], особливо при виробництві пастеризованої чи стерилізованої продукції [1, 22]. Зменшення кількості витраченого пакувального матеріалу важливе при виготовленні будь-якого пакування, особливо металевого, оскільки вартість матеріалу становить майже 70% собівартості пакування [12]. Цього можна досягнути, надаючи пакуванню оптимальної геометричної форми чи зменшуючи товщину пакувального матеріалу в конструкції пакування [16, 17].

Мінімізація вартості пакування в загальній вартості продукції є надзвичайно важливою проблемою [4]. Життєвий цикл пакувань дослідники розділяють на три періоди – виготовлення пакування, перевезення упакованої продукції до споживача й утилізація використаної тари чи пакування [2]. Якщо сумарно взяти весь час, необхідний для забезпечення руху продукції від сировини до споживача, то тільки 2% його витрачається на виробництво продукції, а на транспортування та зберігання продукції – відповідно 5 та 93% часу. Саме при транспортуванні та зберіганні продукції пакування відіграє важливу роль. Тому, зменшуючи його вартість, особливо за рахунок скорочення кількості пакувального матеріалу, вносимо значний вклад в мінімальну вартість руху продукції від виробника до споживача [13].

На зниження витрат матеріалу при виготовленні пакування спрямована оптимізація конструкції тари. Постановка будь-якої задачі оптимізації розпочинається з визначення цільової функції та набору незалежних змінних і включає умови, що характеризують значення цих змінних. Розв'язок оптимізаційної задачі – це знаходження набору значень змінних, при яких цільова функція набуває найкращого (оптимального) значення [3]. Однозначно дати відповідь про оптимальні співвідношення габаритних розмірів пакувань можна, використовуючи теорію екстремумів з курсу математичного аналізу. Нами розвивається запропонована в роботах [10, 11] методика оптимізації конструкцій пакувань канонічної (правильної геометричної) форми, яка може бути використана для дослідження пакувань складної форми та пакувань з урахуванням товщини пакувального матеріалу. Результати досліджень зведено в табл. 1 – 3.

Є два типи екстремальних задач для пакувань продукції: 1) задачі мінімізації площі поверхні заготовки при заданому об'ємі; 2) задачі на виготовлення пакування максимального об'єму

при заданій площі поверхні заготовки. Якщо конкретна ситуація висуває певні додаткові умови, то ці два типи задач стають екстремальними задачами на визначення умовного екстремуму.

2. **Задачі мінімізації поверхні пакування.** Серед різноманітних конструкцій прямокутних картонних пачок (а їх є багато [27]) важливе місце займає чотириклапанне пакування (див. пункт 1 табл. 1). Оскільки місткість пачок визначається добутком їх ширини x , довжини y та висоти z , то проектувальники картонного пакування закладають у конструкцію довільні співвідношення габаритних розмірів у межах необхідного об'єму. Такий підхід до розробки конструкції розгортки може призвести до значних перевитрат картонного матеріалу.

Для оптимізації співвідношень габаритних розмірів чотириклапної пачки в роботі [11] досліджується відповідна задача мінімізації площі розгортки пачки S при наперед заданому

об'ємі V . Площа розгортки для знайдених габаритних значень $x = 0,5V^{\frac{1}{3}}$, $y = V^{\frac{1}{3}}$, $z = 2V^{\frac{1}{3}}$ буде

мінімальною і рівною $S = 9V^{\frac{2}{3}}$ одиниць площі. Співвідношення між мінімальними габаритними розмірами $x : y : z$ становить $1 : 2 : 4$. Підтвердженням достовірності отриманих результатів є графік зміни площі розгортки чотириклапної пачки залежно від її ширини (рис. 1а). З

нього видно, що мінімальною площа розгортки є тоді, коли $x = 0,5V^{\frac{1}{3}}$ одиниць довжини. Більші або менші значення x призводять до розширення площі розгортки. Дослідження геометричних розмірів пакувань для сипких харчових продуктів підтвердили припущення про наявність довільних співвідношень їх габаритних розмірів. Розрахунки показали, що площі розгортки пачок для солі та меленої кави майже на 10%, а вермішелі та харчової соди відповідно на 16 і 19% більші за оптимальні [11]. За умови масового випуску такого пакування маємо значні перевитрати картонного матеріалу.

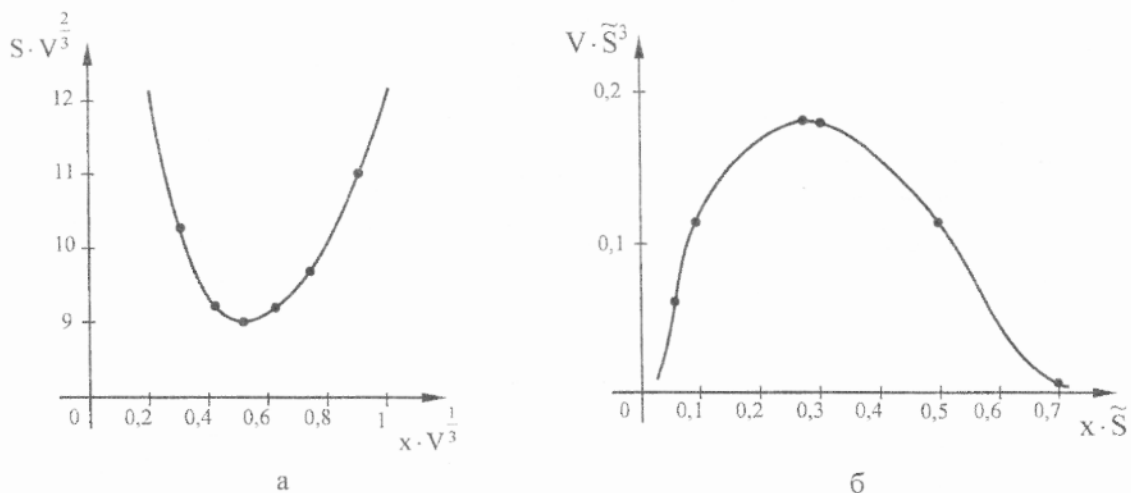
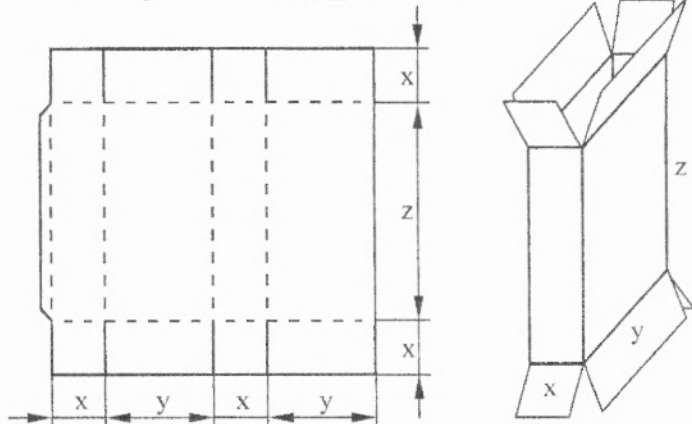
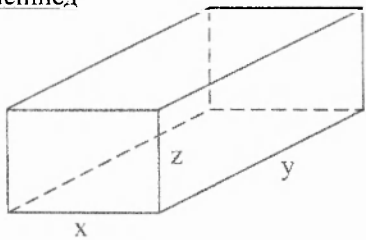
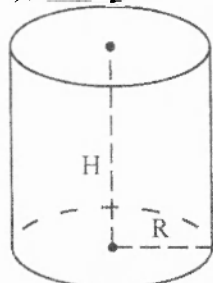


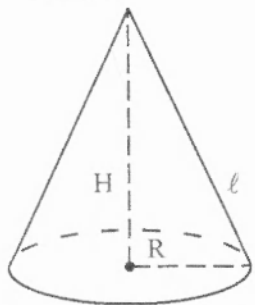
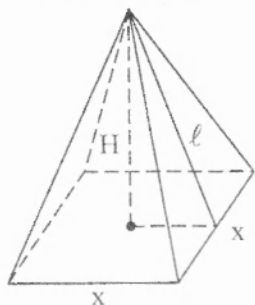
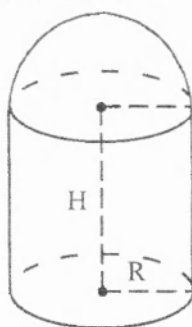
Рис.1. Залежність площі (а) розгортки чотириклапної пачки та її об'єму (б) від ширини пачки

У пакувальній промисловості використовують пакування (пачки, коробки, банки, пляшки та ін.) різних геометричних форм. Тому цю методику оптимізації конструкції пакування випробовуємо на таких канонічних тілах, як паралелепіпед, циліндр, конус, піраміда, а також на складному тілі, що утворюється з циліндра та півсфери. Для цих тіл розглядаємо таку задачу: встановити розміри тіла заданого об'єму V , за яких на його виготовлення піде найменша кількість матеріалу. В результаті отримано оптимальні габаритні (лінійні) розміри і співвідношення (див. табл. 1).

Таблиця 1

**ОПТИМАЛЬНІ ГАБАРИТНІ РОЗМІРИ ТА СПІВВІДНОШЕННЯ РІЗНИХ ТІЛ
ДЛЯ ЗАДАЧ МІНІМІЗАЦІЇ ПОВЕРХНІ**

1) чотириклапанна пачка (закрита) 		$x = 0,5\sqrt[3]{V}$ $y = \sqrt[3]{V}$ $z = 2\sqrt[3]{V}$ $x : y : z$ $1 : 2 : 4$
2) коробка чи ящик зі стикувальними внутрішніми і зовнішніми клапанами (закрита) 		$x = y = \sqrt[3]{\frac{V}{2}}$ $z = \sqrt[3]{4V}, \quad h = \frac{x}{2}$ $x : y : z : h$ $1 : 1 : 2 : 0,5$
3) прямокутний паралелепіпед 	відкритий (без кришки) $x = y = \sqrt[3]{2V};$ $z = \frac{1}{2}\sqrt[3]{2V}$ $x : y : z$ $2 : 2 : 1$	закритий (з кришкою) $x = y = z = \sqrt[3]{V}$ $x : y : z$ $1 : 1 : 1$
4) циліндр 	відкритий (без кришки) $R = H = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$ $R : H$ $1 : 1$	закритий (з кришкою) $R = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}; H = 2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ $R : H$ $1 : 2$

5) <u>конус</u> 	відкритий (без дна) $R = \sqrt[3]{\frac{3V}{\sqrt{2}\pi}}; H = \sqrt{2} \sqrt[3]{\frac{3V}{\sqrt{2}\pi}};$ $\ell = \sqrt{3} \sqrt[3]{\frac{3V}{\sqrt{2}\pi}}$ $R: H: \ell$ $1: \sqrt{2}: \sqrt{3}$	закритий (з дном) $R = \sqrt[3]{\frac{3V}{2\sqrt{2}\pi}}; H = 2\sqrt{2} \sqrt[3]{\frac{3V}{2\sqrt{2}\pi}};$ $\ell = 3 \sqrt[3]{\frac{3V}{2\sqrt{2}\pi}}$ $R: H: \ell$ $1: 2\sqrt{2}: 3$
6) <u>правильна піраміда</u> 	закрита (з дном) $x = \frac{\sqrt[3]{6V}}{\sqrt{2}}; H = \sqrt[3]{6V}; \ell = \frac{3}{2} \frac{\sqrt[3]{6V}}{\sqrt{2}}$ $x: H: \ell$ $1: \sqrt{2}: \frac{3}{2}$	
7) <u>циліндр з півсферою</u> 	закритий (з дном) $R = H = \sqrt[3]{\frac{3V}{5\pi}}$ $R: H$ $1: 1$	

Практичну цінність використання цих співвідношень продемонстровано в роботі [10] на розрахунковому прикладі стосовно циліндричної банки рибних консервів, де $R=49$ мм, $H=47$ мм, яким встановлено, що перевитрата матеріалу на кожній банці складає 4,4 г, або приблизно 6%. Перевитрата з 1 млн. банок становить 4,4 т дефіцитної білої жерсті. Оскільки тільки консервна промисловість випускає кілька мільярдів банок за рік, то в масштабі країни, як бачимо, це питання варте уваги.

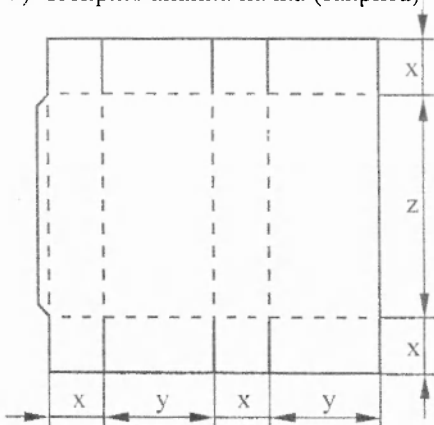
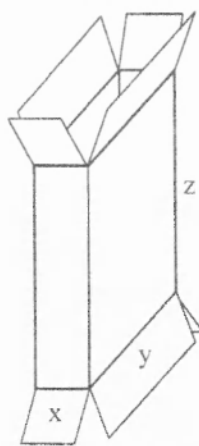
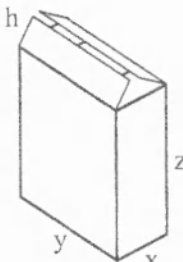
3. Задачі на виготовлення пакувань максимального об'єму. Нехай маємо аркуш картону прямокутної форми. З нього потрібно виготовити прямокутну чотириклапанну пачку максимального об'єму (див. пункт 1 табл. 2). У цьому випадку треба розв'язати задачу на умовний екстремум [6] з наперед відомою площею S та додатковою умовою $b/a = 2(x+y)/(2x+z) = c$, де b, a – відповідно, довжина і ширина розгортки. У роботі [10] показано, що для $x = (c+1 - \sqrt{c^2 - c + 1})\tilde{S}/(3c)$, $y = \tilde{S} - x$, $z = 2[y - (c-1)x]/c$, де $\tilde{S} = \sqrt{Sc}/2$, об'єм пачки буде максимальним. Як приклад взято аркуш формату A4 (210×297 мм). Тоді $c = b/a = 29,7/21 = 1,414$, $S = ab = 623,7 \text{ см}^2$, $\tilde{S} = 14,848 \text{ см}$, $x_{\max} = 0,272\tilde{S} = 4,04 \text{ см}$, $y_{\max} = 0,728\tilde{S} = 10,8 \text{ см}$, $z_{\max} = 0,87\tilde{S} = 12,91 \text{ см}$, $V_{\max} = 0,172274\tilde{S}^3 = 563,3 \text{ см}^3$. Підтвердженням достовірності отриманих результатів є графік зміни об'єму прямокутної чотириклапанної

пачки залежно від її ширини x (рис. 16). З нього видно, що максимальним об'єм пачки є тоді, коли $x = 0,272\tilde{S} = 4,04$ см. Більші або менші значення x спричиняють зменшення об'єму пачки.

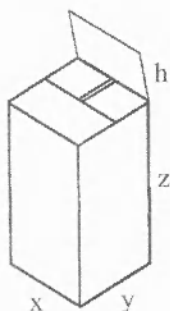
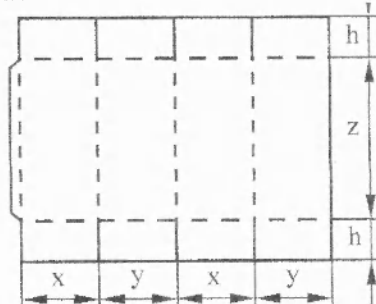
Аналогічні розрахунки проведено для різних прямокутних коробок, виготовлених з прямокутного аркуша картону довільного формату (див. пункти 2 – 5 табл. 2). У цій таблиці наведено й оптимальні габаритні (лінійні) розміри та співвідношення для конуса і піраміди, виготовлених з круга. Для них розглядалась така задача: з круга радіусом R потрібно вирізати сектор так, щоб з нього можна було виготовити конус чи правильну піраміду максимального об'єму. Нехай φ – кут отриманого сектора для виготовлення конуса. При $\varphi \rightarrow 0$; $\varphi \rightarrow 2\pi$ об'єм конуса $V \rightarrow 0$, тому на проміжку $(0; 2\pi)$ існує таке значення φ , при якому цей об'єм найбільший. При склеюванні сектора утворюється конус, твірна якого дорівнює R , довжина кола основи $R\varphi$, радіус основи $r = R\varphi/(2\pi)$, висота $h = \sqrt{R^2 - r^2} = R\sqrt{4\pi^2 - \varphi^2}/(2\pi)$ і об'єм $V(\varphi) = \pi r^2 h/3 = R^3 \varphi^2 \sqrt{4\pi^2 - \varphi^2}/(24\pi^2)$, $0 < \varphi < 2\pi$. $V'(\varphi) = R^3 \varphi (8\pi^2 - 3\varphi^2)/(24\pi^2 \sqrt{4\pi^2 - \varphi^2})$; $V'(\varphi) = 0$ при $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = -2\pi\sqrt{2/3}$, $\varphi_3 = 2\pi\sqrt{2/3}$. Значення φ_1 та φ_2 лежать за межами проміжку $(0; 2\pi)$, тому функція $V(\varphi)$ має єдину критичну точку φ_3 . Оскільки на проміжку $(0, 2\pi)$ функція досягає максимуму, то, не досліджуючи значення φ_3 , можна стверджувати, що йому відповідатиме найбільший об'єм. Для піраміди задача розв'язується аналогічно. Залежно від того, скількисторонній правильний многокутник лежить в її основі, треба розбити коло основи отриманого конуса на відповідну кількість частин і відрізати сегменти, що утворюються.

Таблиця 2

ПРОЕКТУВАННЯ РІЗНИХ ПАКОВАНЬ МАКСИМАЛЬНОГО ОБ'ЄМУ

Розгортка	Вигляд пакування	Оптимальні розміри
1) Чотириклапанна пачка (закрита) 		$x = \frac{\tilde{S}}{3c} \left(c + 1 - \sqrt{c^2 - c + 1} \right)$ $y = \frac{\tilde{S}}{3c} \left(2c - 1 + \sqrt{c^2 - c + 1} \right)$ $z = \frac{2\tilde{S}}{3c} \left(2 - c + \sqrt{c^2 - c + 1} \right),$ $\tilde{S} = \frac{\sqrt{Sc}}{2}, \quad c = \frac{2(x+y)}{2x+z}$ де
2) Коробка чи ящик з двома стикувальними клапанами 		$x = \frac{\tilde{S}}{3c} \left(c + 2 - \sqrt{c^2 - 2c + 4} \right)$ $y = \frac{\tilde{S}}{3c} \left(2c - 2 + \sqrt{c^2 - 2c + 4} \right)$ $z = \frac{\tilde{S}}{3c} \left(4 - c + \sqrt{c^2 - 2c + 4} \right)$ $\tilde{S} = \frac{\sqrt{Sc}}{2}, \quad c = \frac{2(x+y)}{x+z}, \quad h = \frac{x}{2}$ де

3) Коробка чи ящик зі стикувальними внутрішніми і зовнішніми клапанами



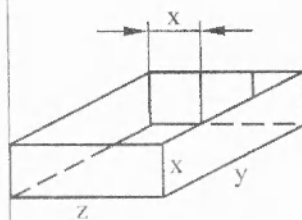
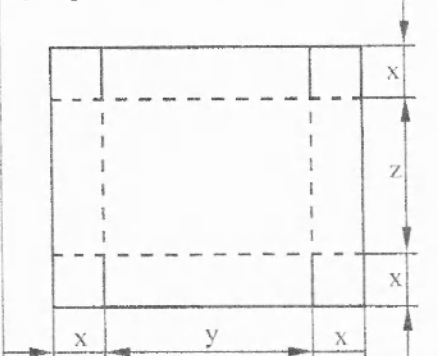
$$x = y = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{S}{3}}$$

$$z = \sqrt{\frac{S}{3}}$$

$$h = \frac{x}{2}$$

$$\begin{matrix} x: y: z: h \\ 1: 1: 2: 0,5 \end{matrix}$$

4) Коробка чи ящик з відкритим верхом



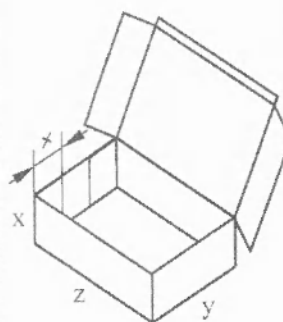
$$x = \frac{\tilde{S}}{3c} (c + 1 - \sqrt{c^2 - c + 1})$$

$$y = \frac{2\tilde{S}}{3c} (2c - 1 + \sqrt{c^2 - c + 1})$$

$$z = \frac{2\tilde{S}}{3c} (2 - c + \sqrt{c^2 - c + 1}),$$

$$\tilde{S} = \frac{\sqrt{Sc}}{2}, \quad c = \frac{y + 2x}{z + 2x}$$

5) Коробка чи ящик з відкидною кришкою і клапанами



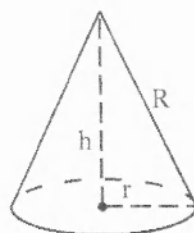
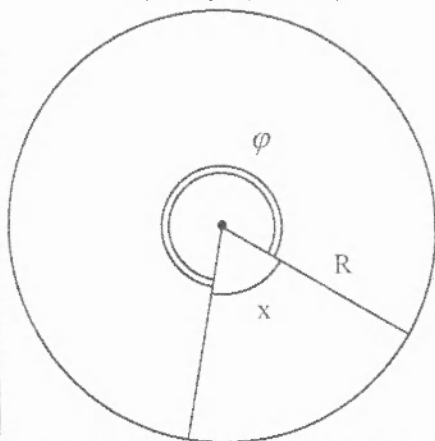
$$x = \frac{\tilde{S}}{3c} (c + 1 - \sqrt{c^2 - c + 1})$$

$$y = \frac{\tilde{S}}{3c} (2c - 1 + \sqrt{c^2 - c + 1})$$

$$z = \frac{2\tilde{S}}{3c} (2 - c + \sqrt{c^2 - c + 1}),$$

$$\tilde{S} = \frac{\sqrt{Sc}}{2}, \quad c = \frac{2(x + y)}{2x + z}$$

6) Конус (без дна)

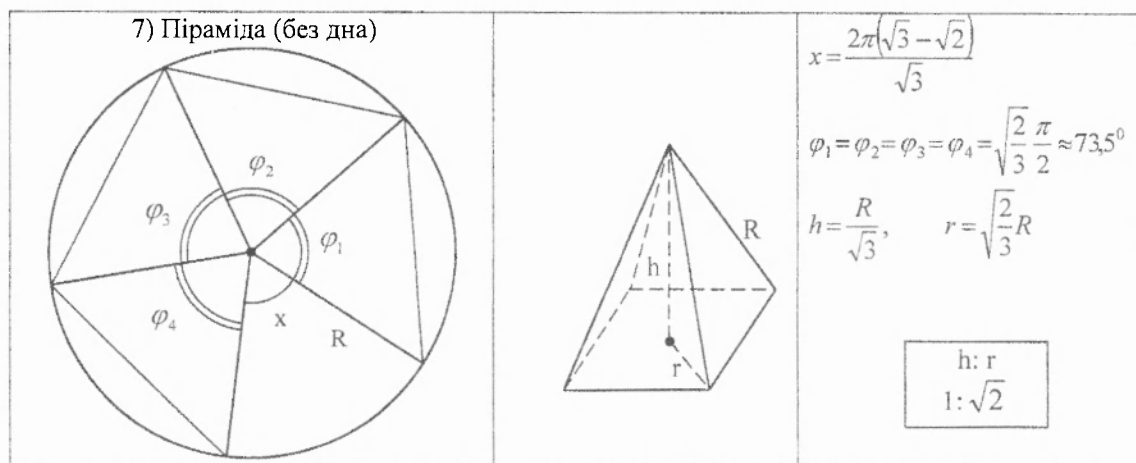


$$x = \frac{2\pi(\sqrt{3} - \sqrt{2})}{\sqrt{3}}$$

$$\varphi = \frac{2\sqrt{2}\pi}{\sqrt{3}} \approx 294^\circ$$

$$h = \frac{R}{\sqrt{3}}, \quad r = \sqrt{\frac{2}{3}} R$$

$$\begin{matrix} h: r \\ 1: \sqrt{2} \end{matrix}$$



4. Задачі мінімізації поверхні пакування з урахуванням товщини стінок. Потрібно встановити зовнішні розміри відкритого (без кришки) ящика форми прямокутного паралелепіпеда із заданими об'ємом V і товщиною стінок h за умови мінімальної витрати матеріалу (див. пункт 1 у табл. 3). У роботі [10] показано, що для

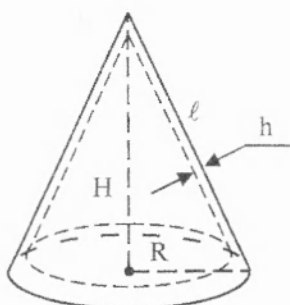
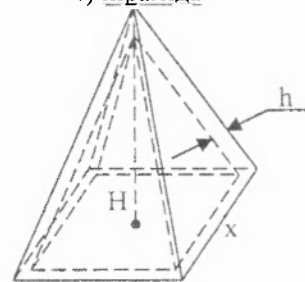
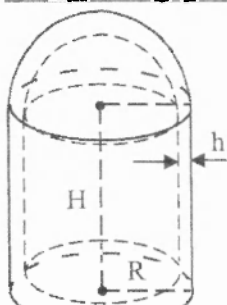
$$x = y = \sqrt[3]{2V} + 2h, \quad z = \frac{1}{2}\sqrt[3]{2V} + h \text{ зовнішня площа поверхні паралелепіпеда буде мінімаль-}$$

ною. Аналогічні розрахунки з урахуванням товщини стінок матеріалу проведено авторами для циліндра, конуса, піраміди, циліндра з півсферою (див. табл. 3).

Таблиця 3

**ОПТИМАЛЬНІ ГАБАРИТНІ РОЗМІРИ ТА СПІВВІДНОШЕННЯ РІЗНИХ
ТІЛ З УРАХУВАННЯМ ТОВЩИНИ СТІНОК МАТЕРІАЛУ
ДЛЯ ЗАДАЧ МІНІМІЗАЦІЇ ПОВЕРХНІ**

1) паралелепіпед	відкритий (без кришки) $x = y = \sqrt[3]{2V} + 2h$ $z = \frac{1}{2}\sqrt[3]{2V} + h$ $\begin{matrix} x: y: z \\ 2: 2: 1 \end{matrix}$	закритий (з кришкою) $x = y = z = \sqrt[3]{V} + 2h$ $\begin{matrix} x: y: z \\ 1: 1: 1 \end{matrix}$
2) циліндр	відкритий (без кришки) $R = H = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}} + h$ $\begin{matrix} R: H \\ 1: 1 \end{matrix}$	закритий (з кришкою) $R = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} + h$ $H = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}} + 2h$ $\begin{matrix} R: H \\ 1: 2 \end{matrix}$

3) <u>конус</u> 	відкритий (без дна) $R = H = \sqrt[3]{\frac{3V}{\pi}} + h$ $\ell = \sqrt{2} \left(\sqrt[3]{\frac{3V}{\pi}} + h \right)$ $R : H : \ell$ $1 : 1 : \sqrt{2}$	закритий (з дном) $R = \sqrt[3]{\frac{3V}{2\pi}} + h$ $H = 2 \left(\sqrt[3]{\frac{3V}{2\pi}} + h \right)$ $\ell = \sqrt{5} \left(\sqrt[3]{\frac{3V}{2\pi}} + h \right)$ $R : H : \ell$ $1 : 2 : \sqrt{5}$
4) <u>піраміда</u> 	закрита (з дном) $x = H = \sqrt[3]{3V} + 2h$ $x : H$ $1 : 1$	
5) <u>циліндр з півсферою</u> 	закритий (з дном) $R = H = \sqrt[3]{\frac{3V}{5\pi}} + h$ $R : H$ $1 : 1$	

Таким чином, з вищевикладеного можна зробити висновки:

1) У всіх розглянутих задачах дослідження доведені до співвідношення габаритних (лінійних) розмірів (див. табл. 1 – 3). Це дає можливість на практиці, знаючи конструкцію пакування, за допомогою звичайної лінійки оцінити ефективність пакування продукції. Підтвердженням достовірності отриманих результатів є графіки зміни площі чи об'єму залежно від типу екстремальної задачі (див. рис.1 а, б).

2) На конкретних прикладах доведено, що за рахунок надання пакуванню оптимальної (раціональної) форми можна заощадити значну кількість пакувального матеріалу (див. пункти 2, 3). У масштабі країни це вагомий резерв економії матеріальних та фінансових ресурсів.

3) Корисним для проектування є розв'язок задачі на умовний екстремум, отриманий у пункті 3, який дозволяє з аркуша прямокутного формату виготовити пакування максимального об'єму. Наведений алгоритм для проектування чотириклапанної пачки максимального об'єму з аркуша довільного прямокутного формату можна застосувати для проектування пакування іншої форми чи конструкції (див. табл. 2).

4) Розглянуто аналогічні задачі для дослідження канонічних тіл, в яких враховано ще й товщину стінок матеріалу. Причому при потребі можна розглядати і тіла складної форми (див.

табл. 3). Ці задачі можуть бути корисними при проектуванні транспортної тари, матеріалом для якої найчастіше служить гофрокартон певної товщини.

5) Досліджені у цій роботі задачі забезпечують повноту розгляду характерних задач оптимізації конструкцій пакувань. Це дозволяє створити програмний пакет, який об'єднував би розроблені в даній роботі алгоритми і підказував би оптимальні розміри пакування як за формою, так і за товщиною, і був би корисним для оптимізації проектування й планування виробництва різноманітного пакування чи тари. Багатоетапний процес, який потребує місячної роботи багатьох спеціалістів, може бути виконаний одним висококваліфікованим оператором за годину [24].

6) Займатися проблемами пакування продукції є сенс ще й тому, що в умовах ринкових відносин і наявності в Україні імпортованих товарів, які, як правило, мають якісне пакування, товари вітчизняного виробництва повинні бути конкурентоспроможними.

7) Оптимальне пакування враховує не тільки питання економічності, а й екології, оскільки впровадження його зменшує кількість сміття. Такий факт, як існування в європейських країнах смітників для різних видів відходів, свідчить про серйозне ставлення до переробки чи утилізації відходів [4, 13, 20]. Отже, процеси виготовлення і переробки чи утилізації пакування, відображаючи рівень розвитку промисловості й сільського господарства, можуть суттєво впливати на рівень життя.

Ця стаття написана за матеріалами наукової роботи «Оптимізація геометричних параметрів пакування», що була представлена на міжнародному конкурсі студентських наукових робіт з поліграфії та видавничої справи «Молодь і поліграфія», який відбувався в Українській академії друкарства у 2004 р., й була відзначена премією за друге місце у відповідному напрямку.

1. Варфоломєєв А.Й., Сторіжко Й.І. Вибір геометрії упаковки // Упаковка. 2002. №2(27). С. 54.
2. Гавенко С.Ф., Зацерковна Р.С., Климович Л.М. Дослідження основних характеристик пакувальних картонів при вхідному контролі їх якості // Наукові записки / УАД. 2004. Вип. 7. С. 31 – 35.
3. Гилл Ф., Мюррей У., Райт М. Практическая оптимизация. М., 1985.
4. Грудке Г. Новые требования к упаковке // Упаковка. 2003. №3. С. 41.
5. Данилевский В.А. Картонная и бумажная тара. М., 1979.
6. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Навч. посіб. К., 1993.
7. Ильин В.Я. Конструирование и оформление изделий из бумаги и картона. М., 1984.
8. Ильин В.Я., Ануров М.Н. Основное оборудование и механические методы переработки бумаги и картона. Л., 1980.
9. Козак А.В. Упаковка снижает количество мусора // Упаковка. 2001. №6. С. 30 – 32.
10. Коляно Я.Ю., Ковалик Н.В., Яремчишин О.Б., Маца Р.С., Ілік І.І. Оптимізація геометричних параметрів пакування // Наукові записки / УАД. 2004. Вип. 7. С. 15 – 20.
11. Коляно Я.Ю., Регей І.І. Оптимізація конструкції картонних розгортки // Упаковка, 1999. №2(11). С. 38.
12. Крестьянполь О.А., Семицький К. Я., Луцинський А.Б. Оптимізація конструкції тари // Упаковка. №1(26). 2002. С. 20.
13. Кривошей В.М. Сучасне пакування – шлях до економії ресурсів // Упаковка. 2002. №6(31). С. 8.
14. Кривошей В.М. Упаковка в нашому житті // Упаковка. 2002. №1(26). С. 6.
15. Кривошей В.М. Упаковка в нашому житті // Упаковка. 2002. №2 (27). С. 8.
16. Лойко А.Ф., Панкратов А.В. Оптимизация раскроя и упаковывания // Упаковка. 1998. №3. С. 8.
17. Маламен Г.Д., Котельников А.Ф. Упаковка для консервов // Упаковка. 2001. №4. С. 34 – 35.
18. Марьянш М.Е. Комплексная механизация погрузочно-разгрузочных, транспортных и складских работ в консервном производстве. Л., 1985.
19. Организация упаковки продовольственных товаров. Пер. с венгерского Л.И. Павлова. М., 1987.
20. Підлісна О. Що робити зі сміттям // Поступ у Львові, 2004. №264(1573). С. 4.
21. Соломенко М.Г., Шредер В.Л., Кривошей В.М. Тара из полимерных материалов. М., 1990.
22. Степанець О.І., Варфоломєєв А.Й. Дослідження динаміки тиску і напружень у пляшках при пастеризації: Наук. пр. УДУХТ. 1998. №4. С. 99 – 100.
23. Тенцер Г., Хессе Ф. Картонная и бумажная тара. М., 1974.
24. Фрейдин С., Губерниев В. Мода на пояса! Оптимизация параметров гофротары // Пакет. 2003. №6(23). С. 18.
25. Шаповалов Ю.Н. Упаковывание химической продукции. Л., 1983.
26. Шкурин В.А., Пладис Ф.А., Сурмаев Г.Э. Технические средства и оборудование для пакетирования продукции. М., 1987.
27. Шредер В. Л., Иванович К.С. Картон. Тара и упаковка. К., 1999.