В. Р. Пасіка

СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНИХ ЗАКОНІВ ПЕРІОДИЧНОГО РУХУ

У роботі наводяться результати оптимального синтезу законів періодичного руху (ЗПР) для інерційних механізмів, в яких при заданій максимальній швидкості забезпечується мінімум пришвидшення. Показано, що синтезовані ЗПР мають значно кращі характеристики і розширений діапазон максимальних швидкостей.

In work are described results of optimum synthesis of laws of periodic movement for inertial mechanisms in which for the set of maximal speeds the minimum of acceleration is provided. It is shown, synthesized laws of periodic movement have considerably best haracteristics and the increased range of the maximal speeds.

Зацікавленість багатьох учених питаннями синтезу ЗПР викликане різноманітним застосуванням кулачкових механізмів. Вони входять до складу циклових механізмів поліграфічних машин-автоматів, механізмів газорозподілення у швидкохідних двигунах внутрішнього згорання, застосовуються в загальному машинобудуванні, текстильній промисловості тощо. Ріст швидкостей виконавчих органів машин, необхідність точного відтворення їхніх рухів вимагають від проектантів кулачкових механізмів усе нових законів руху штовхача, які б відповідали певним кінематичним і динамічним властивостям. Цим питанням присвячено роботи Л. В. Корчемного [1], Е. Є. Пейсаха [4], В. О. Новгородцева [2]. Однак потреба у забезпеченні руху вихідної ланки згідно з конкретним законом і заданими кінематичними константами виникає при проектуванні багатьох інших механізмів.

Значний вклад у розроблення методів синтезу ЗПР зробили вчені Української академії друкарства. Так, Е. О. Саввіну [7] вдалося синтезувати цілу низку ЗПР, які характеризуються кращими від відомих законів кінематичними характеристиками. При цьому було запропоновано метод коригуючих функцій, за допомогою якого можна підбирати потрібні кінематичні константи. Під керівництвом проф. О. М. Полюдова [5] розроблено методику автоматизованого проектування кулачкових механізмів з автоматизованим синтезом поліноміальних ЗПР довільного типу. При цьому задаються не лише потрібні константи швидкості і пришвидшення, але й моменти виникнення їхніх екстремумів.

Однак, на погляд автора, усі відомі сьогодні методи синтезу мають недолік: вони не здатні забезпечити синтез такого закону, при якому одна або кілька кінематичних характеристик були б мінімальними при заданих інших. Такий підхід уможливлює оптимальний синтез ЗПР як для силових, так і для інерційних механізмів. Перша спроба оптимального синтезу ЗПР була зроблена автором у роботі [3] стосовно закону руху повзуна в кривошипно-повзунному механізмі зі змінною довжиною кривошипа. Тут запропоновано метод синтезу, сформульовано (але не розв'язано) основну задачу оптимізації.

У пропонованій роботі наводяться результати оптимального синтезу ЗПР для інерційних механізмів, в яких при заданій максимальній швидкості забезпечується мінімум пришвидшення. Оптимальний синтез ЗПР проведений в інваріантах відповідно до позначень проф. К. В. Тіра [8]. Наведено оптимально синтезовані ЗПР зі значно кращими кінематичними характеристиками, ніж у Саввіна [7].

Нехай на початку і в кінці руху виконавчого органу накладаються такі умови:

$$k=0: \quad a_k=0, \quad b_k=0, \quad c_k=C_0, \quad c_k'=C_0', \dots, \quad c_k^m=C_0^m; \tag{1}$$

$$k=1: \quad a_k=1, \quad b_k=0, \quad c_k=C_1, \quad c_k'=C_1', \dots, \quad c_k^m=C_1^m, \tag{2}$$

де k – безрозмірний час (узагальнююча координата); a_k, b_k, c_k – інваріанти переміщення, швидкості і пришвидшення, відповідно. Штрихами позначено похідні по k.

Таким чином, на закон руху накладаємо по m граничних умов.

Подамо інваріант переміщення у вигляді функції

$$a_k = a_{ks} + k^n W(k), \tag{3}$$

де a_{ks} – функція, яка задовольняє початкові умови (1). Довільну функцію $W(k)$ виберемо таким чином, щоб задовольнити кінцеві умови (2). Для цього підставляємо функцію (3) в умови (2).

Перша умова дає рівняння $1 = a_{ks}(1) + W(1)$, з якого знаходимо значення функції W у кінцевому положенні:

$$W(1) = 1 - a_{ks}(1). \tag{4}$$

З другої умови $b_k = \dfrac{da_k}{dk} = a_{ks}^{'}(1) + nk^{n-1}W(1) + k^n W^{'}(1)$ визначаємо

$$W^{'}(1) = n[a_{ks}(1) - 1] - a_{ks}^{'}(1) \qquad (5)$$

Поступаючи аналогічним чином і враховуючи, що $c_k = \dfrac{db_k}{dk}$, можна визначити похідні вищих порядків від функції W у точці для $k = 1$. Наприклад:

$$W^{''}(1) = C_1 + n[n+1] - n(n+1)a_{ks}(1) + 2na_{ks}^{'}(1) - a_{ks}^{''}(1); \qquad (6)$$

$$W^{'''}(1) = C_1^{'} - 3nC_1 + n(2 + 3n + n^2)[a_{ks}(1) - 1] - 3n(1+n)a_{ks}^{'}(1) + 3na_{ks}^{''}(1) - a_{ks}^{'''}(1). \qquad (7)$$

Зобразимо саму функцію W таким чином: $W(k) = a_{ke} + (k-1)^n Z(k)$, де a_{ke} – функція, що задовольняє умови (4)...(7); $Z(k)$ – довільна функція. Єдина умова, яка накладається на неї, це існування $n-1$ похідної.

Таким чином, ЗПР описуватиметься виразом

$$a_k = a_{ks} + k^n\left[a_{ke} + (k-1)^n Z(k)\right]. \qquad (8)$$

Отриманий у вигляді (8) ЗПР вигідно відрізняється від поліноміальних законів [7] і [5]. Як бачимо, у вираз увійшла довільна функція $Z(k)$, на яку не накладаються жодні умови, крім існування $n-1$ похідної. Вибираючи певним чином дану функцію, маємо змогу додатково впливати на сам закон. Більше того, з даного закону можна отримати усі базові ЗПР.

Для будь-якого ЗПР перші дві умови з (1) і (2) повинні обов'язково задовольнятись, оскільки однозначне переміщення вихідної ланки в точці $k = 0$ починається і в точці $k = 1$ завершується. Для задоволення двох початкових умов з (1) функцію $a_{ks}(k)$ виберемо у вигляді полінома $a_{ks} = a_{S_1} + a_{S_2}k$, коефіцієнти якого визначаємо із системи алгебраїчних рівнянь

$$\left.\begin{aligned} a_{S_1} + a_{S_2}k &= 0 \\ a_{S_2} &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad \Rightarrow \qquad a_{ks}(k) \equiv 0.$$

У кінці інтервалу при $k = 1$ функція a_{ke}, яку вибираємо теж у вигляді полінома $a_{ke} = a_{E_1} + a_{E_2}k$, задовольняє умови (4) і (5):

$$\left.\begin{aligned} a_{E_1} + a_{E_2}k &= W(1) \equiv 1 \\ a_{E_2} &= W^{'}(1) \equiv -2 \end{aligned}\right\}.$$

Розв'язок системи $a_{ke}(k) = 3 - 2k$, а інваріант переміщення дорівнює

$$a_k = k^2\left[3 - 2k + (k-1)^2 Z(k)\right]. \qquad (9)$$

При $Z = 0$ ми отримали відомий з літератури [7] закон рівноспадного пришвидшення $a_k = 3k^2 - 2k^3$.

Для отримання закону Шуна на функцію $Z(k)$ у законі (9) накладемо додаткові умови – інваріант пришвидшення на початку і в кінці переміщення дорівнює нулеві: $c_k(0) = 0$, $c_k(1) = 0$. Для задоволення цих умов приймаємо функцію $Z(k)$ з двома невідомими у вигляді полінома

$Z(k) = z_1 + z_2 k$. Двічі диференціюючи вираз (9) і підставляючи туди додаткові нульові умови, знаходимо значення функції $Z(k)$ на границях $Z(0) = -3$ і $Z(1) = 3$. Маючи значення функції $Z(k)$ у двох точках, визначаємо її дві невідомі z_1 і z_2. Таким чином, довільна функція $Z(k)$ набуває вигляду $Z(k) = -3 + 6k$, а закон (9) після алгебраїчних перетворень – $a_k = 10k^3 - 15k^4 + 6k^5$. Для закону Шуна максимум швидкості – константа $B = 1{,}75$, максимум пришвидшення – константа $C = 5{,}584$, константа кінетичної енергії $D = 5{,}545$.

Якщо функцію $Z(k)$ вибрати так, щоб і четверта умова з умов (1) і (2) була нульовою, то, поступаючи аналогічним чином, отримаємо теж відомий з літератури [6] поліноміальний закон степені 4-5-6-7, знаний ще як закон Стоддарта [9]. Тут довільна функція $Z(k) = -3 - 4k + 30k^2 - 20k^3$. Для цього закону константа $B = 2{,}187$; $C = 7{,}409$; $D = 10{,}747$.

Однак даний метод синтезу ЗПР не зводиться до відтворення уже відомих законів. Він спрямований на пошук оптимальних законів. Під оптимальним ЗПР розумітимемо такий, для якого знайдено мінімальні значення однієї з констант B, C або D при фіксованих інших константах.

Для інерційних механізмів задачу синтезу оптимального ЗПР сформулюємо наступним чином: при заданих граничних умовах (1) і (2) вибрати функцію $Z(k)$ так, щоб при конкретному значенні константи B константа C набувала б мінімального значення. Вважаючи функції a_{ks} і a_{ke} у виразі (8) відомими, оскільки вони залежать лише від граничних умов (1) і (2), зводимо задачу оптимізації до мінімізації функціоналу

$$I(k) = \max_{0 \le k \le 1} |c_k(Z,k)| \tag{10}$$

при обмеженнях: для $k = 0{,}5$ $\quad b_k(Z,k) = B, \quad c_k(Z,k) = 0$. Обмеження вибрані в такому вигляді, щоб отримати симетричні ЗПР.

Для проведення чисельної мінімізації функціоналу (10) подамо функцію $Z(k)$ у вигляді ряду $Z(k) = \sum_{i=1}^{n_1} z_i \Psi_i(k)$, де z_i – невизначені коефіцієнти; $\Psi_i(k)$ – наперед вибрані функції. Тоді функціонал (10) залежатиме лише від коефіцієнтів z_i, тобто $I(k) = I(z_1, z_2, ..., z_{n_1})$.

Для дослідження було вибрано поліноми $\Psi_i(k) = k^{i-1}$, $\quad i = 1,...,n_1$, причому n_1 змінювалося від трьох до десяти. З множини функцій, які відповідають фіксованому значенню n_1, визначалась оптимальна. Дослідження показують, що з ростом степені полінома не можна зробити чіткого висновку щодо зростання чи спадання функціоналу I. Для отримання практичних результатів достатньо обмежитись $n_1 = 4$.

При синтезі ЗПР найбільший інтерес викликають такі закони, для яких виконуються перші чотири умови з умов (1) і (2). Збільшення кількості умов призводить до значного зростання основних констант кінематичних характеристик закону і через те не має практичного застосування.

Пошук мінімуму функціоналу (10) належить до задач нелінійного програмування з обмеженнями і вимагає проведення значної кількості обчислень. Тому для економії машинного часу подамо інваріанти ЗПР (8) з урахуванням перших чотирьох граничних умов, тобто приймаємо $n=4$.

Функцію a_{ks}, яка задовольняє перші чотири умови (1), подамо у вигляді степеневого ряду $a_{ks} = a_{S_1} + a_{S_2} k + a_{S_3} k^2 + a_{S_4} k^3$. Підставляючи початкові умови, визначаємо невідомі коефіцієнти a_{S_i} і записуємо:

$$a_{ks} = \frac{C_0}{2}k^2 + \frac{C_0'}{6}k^3 \quad (11)$$

Функцію a_{ke}, яка при $k = 1$ задовольняє умови (4)...(7), також подамо у вигляді степеневого ряду $a_{ke} = a_{E_1} + a_{E_2}k + a_{E_3}k^2 + a_{E_4}k^3$. Для визначення невідомих коефіцієнтів a_{E_i} записуємо систему алгебраїчних рівнянь, попередньо спростивши вирази для функції W і її похідних:

$$\left.\begin{aligned} & a_{E_1} + a_{E_2} + a_{E_3} + a_{E_4} = W \equiv 1 - \frac{C_0}{2} - \frac{C_0'}{6}, \\ & a_{E_2} + 2a_{E_3} + 3a_{E_4} = W' \equiv C_0 + \frac{C_0'}{6} - 4, \\ & 2a_{E_3} + 6a_{E_4} = W'' \equiv C_1 + 20 - 3C_0 - \frac{C_0'}{3}, \\ & 6a_{E_4} = W''' \equiv C_1' + C_0' + 12C_0 - 12C_1 - 120. \end{aligned}\right\}$$

Розв'язавши систему, матимемо:

$$a_{E_1} = 35 - 5C_0 - \frac{2}{3}C_0' + \frac{5}{2}C_1 - \frac{C_1'}{6}, \qquad a_{E_2} = 10C_0 + C_0' - 84 - 7C_1 + \frac{C_1'}{2},$$

$$a_{E_3} = \frac{13}{2}C_1 + 70 - \frac{15}{2}C_0 - \frac{C_1'}{2} - \frac{2}{3}C_0', \qquad a_{E_4} = \frac{C_1'}{6} + \frac{C_0'}{6} + 2C_0 - 2C_1 - 29.$$

Взявши похідні від ЗПР (8) і провівши нескладні алгебраїчні перетворення, отримуємо аналітичні вирази для інваріантів швидкості b_k, пришвидшення c_k і першої похідної від пришвидшення c_k':

$$b_k = C_0k + \frac{C_0'}{2}k^2 + k^3\left(4a_{ke} + ka_{ke}'\right) + 4k^3(k-1)^3(2k-1)Z(k) + k^4(k-1)^4Z'(k); \quad (12)$$

$$c_k = C_0 + C_0'k + k^2\left(12a_{ke} + 8ka_{ke}' + k^2a_{ke}''\right) + 2k^2(k-1)^2\left[6(k-1)^2 + 16k(k-1) + 6k^2\right]Z(k) +$$
$$+ 8k^3(k-1)^3(2k-1)Z'(k) + k^4(k-1)^4Z''(k); \quad (13)$$

$$c_k' = C_0' + k\left(24a_{ke} + 36ka_{ke}' + 12k^2a_{ke}'' + k^3a_{ke}'''\right) + 24k(k-1)\left(14k^3 - 21k^2 + 9k - 1\right)Z(k) +$$
$$+ 12k^2(k-1)^2\left(14k^2 - 14k + 3\right)Z'(k) + 12k^3(k-1)^3(2k-1)Z''(k) + k^4(k-1)^4Z'''(k). \quad (14)$$

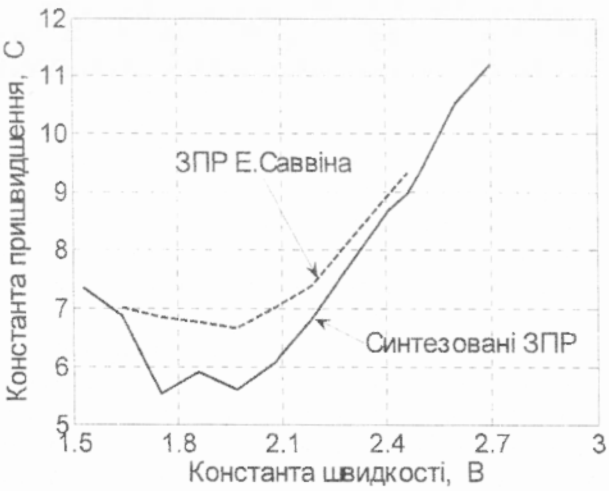
Внаслідок проведеного оптимального синтезу отримуємо коефіцієнти довільної функції $Z(k)$, константи C, D. У таблиці наведено деякі результати оптимального синтезу.

B	C	D	Z(k)
1	2	3	4
1,53	7,3617	6,062	$148{,}4156k^3 - 553{,}8533k^2 + 771{,}0667k - 514{,}0444$
1,641	6,866	5,656	$131{,}5472k^3 - 509{,}4754k^2 + 739{,}1428k - 492{,}7619$
1,75	5,542	5,217	$16{,}77862k^3 - 100{,}6717k^2 + 201{,}3434k - 134{,}229$

Продовження таблиці

1	2	3	4
1,859	5,91	5,92	$125{,}38905k^3 - 584{,}14233k^2 + 1000{,}0926k - 666{,}72843$
1,969	5,592	7,45	$95{,}4074k^3 - 460{,}5724k^2 + 809{,}2728k - 539{,}5152$
2,078	6,07	9,407	$44{,}9219k^4 - 135{,}1577k^3 - 98{,}9879k^2 + 692{,}4705k - 626{,}4785$
2,187	6,83	11,066	$89{,}43895k^3 - 536{,}3777k^2 + 1072{,}4994k - 714{,}9996$
2,297	7,766	12.93	$64{,}3542k^3 - 442{,}189k^2 + 940{,}442k - 626{,}9613$
2,406	8,67	14,85	$34{,}6461k^5 - 296{,}8323k^4 + 587{,}3611k^3 - 78{,}85417k^2 - 469{,}4573k + 188{,}085$
2,461	8,98	16,14	$22{,}8645k^9 - 193{,}4612k^8 + 237{,}2437k^7 + 246{,}9682k^6 - 60{,}2308k^5 - 278{,}6751k^4 - 270{,}1831k^3 - 97{,}7617k^2 + 128{,}6153k + 327{,}7426$
2,5	9,34	16,877	$21{,}1701k^9 - 208{,}0257k^8 + 297{,}5659k^7 + 207{,}5772k^6 - 95{,}498k^5 - 265{,}8198k^4 - 236{,}0539k^3 - 76{,}66576k^2 + 123{,}4877k + 299{,}2948$
2,6	10,52	18,52	$-4{,}422696k^3 - 184{,}6638k^2 + 580{,}5277k - 387{,}0184$
2,7	11,19	20,55	$-27{,}311095k^3 - 98{,}53346k^2 + 459.4669k - 306{,}3113$

На рисунку наведено графіки залежності константи пришвидшення C від константи швидкості B для ЗПР третього сімейства, синтезованих Е. О. Саввіним [7]. Як бачимо, нові ЗПР на усьому діапазоні зміни константи B мають менші значення константи C. Крім того, значно розширений діапазон допустимих швидкостей з $1{,}641 < B < 2{,}461$ до $1{,}53 \le B \le 2{,}7$. Нехарактерна поведінка кривої при $B = 1{,}859$ вимагає додаткових пошуків вхідної точки Z_0.



Порівняльні графіки між ЗПР третього сімейства за Саввіним і синтезованими

Треба зауважити, що для більшості значень B вектор стартової точки пошуку мінімуму становить $Z_0[0,0,0,0]$. Однак для деяких значень константи B при такій стартовій точці отримати плавну криву зміни пришвидшення не можна. Тут потрібно підбирати вхідну точку Z_0. Якихось конкретних рекомендацій щодо вибору вхідної точки сформулювати неможливо. Так. для $B = 1{,}859$ $Z_0 = [111{,}333{,}222{,}111]$, для $B = 1{,}969$ $Z_0 = [-1110{,}-333{,}-1111{,}0]$ · для $B = 2{,}078$ $Z_0 = [-9000{,}2220{,}2120{,}3000{,}-2220]$. В останньому варіанті найкращий результат був досягнутий при $n_1 = 5$.

Таким чином, запропоновано принципово новий підхід до синтезу законів періодичного руху. Синтезовано низку законів періодичного руху з поліпшеними характеристиками, порівняно з відомими. Такі закони найкраще використовувати для машин з інерційним навантаженням.

1. Корчемный Л.В. Динамика газораспределительного механизма и профилирование кулачков быстроходных двигателей // Тр. НАМИ. 1960. Вып. 91. 2. Новгородцев В.А. Оптимизация полидинамических законов движения исполнительного звена кулачкового механизма: Дисс... канд. техн. наук. Харьков, 1968. 3. Пасіка В. Р. До питання синтезу законів періодичного руху комбінованих механізмів // Машинознавство. 2002. №11. С. 29 – 32. 4. Пейсах Э. Е. Исследование динамики кулачковых механизмов и синтез динамических оптимальных законов движения ведомого звена: Автореф. дис... канд. техн. наук. Л., 1963. 5. Полюдов О. М., Кузнецов В. О. Автоматизоване проектування кулачкових механізмів. Львів, 1999. 6. Ротбарт Г. Кулачковые механизмы. М., 1964. 7. Саввин Э. А. Синтез полидинамических законов периодического движения Львов, 1975. Вып. 6. 8. Тир К. В. Механика полиграфических автоматов. М., 1966. 9. Stoddart D. A. Polidine Cam Design. Machine Design, Jan. Feb.-March, 1953.