

УДК 512.64

ПРО КОЕФІЦІЄНТИ ХАРАКТЕРИСТИЧНОГО МНОГОЧЛЕНА ОДНОРІДНОЇ МНОГОЧЛЕННОЇ МАТРИЦІ ВІД ДВОХ ЗМІННИХ І ЇЇ ФАКТОРИЗАЦІЮ

Р.В. Коляда, О.М. Мельник

Досліджується питання розкладу на лінійні множники однорідного матричного многочлена від двох змінних. Указуються умови такого розкладу з врахуванням елементів матриць-коефіцієнтів матричного многочлена.

Исследуется вопрос разложения на линейные множители однородного матричного многочлена от двух переменных. Указываются условия такого разложения с учетом элементов матриц-коэффициентов матричного многочлена.

Проблема факторизації многочленних матриць від двох змінних над довільним полем знаходить застосування в багатьох задачах прикладного характеру [4, 5]. Вона розглядалася в [1, 3], де запропоновані методи факторизації многочленних матриць від двох змінних.

У даній роботі зроблено новий підхід до розв'язання цієї проблеми, зокрема вказано метод факторизації однорідних матричних многочленів на лінійні множники з врахуванням елементів матриць-коефіцієнтів матричного многочлена.

Нехай P – довільне поле, $P[x, y]$ – кільце многочленів від двох змінних x та y над полем P . Позначимо через P_n і $P_n[x, y]$ кільця $n \times n$ -матриць над P і $P[x, y]$, відповідно; E та O – одинична та нульова матриці порядку n .

Розглянемо однорідну многочленну матрицю $A(x, y) \in P_n[x, y]$, записану у вигляді матричного многочлена

$$A(x, y) = A_0 x^s + A_1 x^{s-1} y + \dots + A_{s-1} x y^{s-1} + A_s y^s = \left[\sum_{i,j=1}^n a_{ij}^{(l)}(x, y) \right]_{i,j=1}^n, \quad (1)$$

$$A_i \in P_n, \quad i = 0, 1, 2, \dots, s; \quad \det A_0 \neq 0, \quad \det A_s \neq 0.$$

Визначником матриці $A(x, y)$ називатимемо характеристичний многочлен цієї матриці

$$\text{Нехай } \det A(x, y) = \Delta(x, y) = p_0 x^{sn} + p_1 x^{sn-1} y + \dots + p_{sn-1} x y^{s-1} + p_{sn} y^{sn}.$$

Теорема 1. Коефіцієнти p_i , $i = 0, 1, 2, \dots, sn$ характеристичного многочлена $\Delta(x, y)$ матричного многочлена $A(x, y)$ обчислюються за формулою

$$p_k = \sum_{l_1 + \dots + l_n = sn - k} \begin{vmatrix} a_{11}^{(l_1)} & a_{12}^{(l_2)} & \dots & a_{1n}^{(l_n)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}^{(l_1)} & a_{n2}^{(l_2)} & \dots & a_{nn}^{(l_n)} \end{vmatrix}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, sn,$$

де $a_{ij}^{(l)}$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$) – елементи матриць $A_0, A_1, \dots, A_s$.

Доведення теореми отримуємо, врахувавши заміну $x = ty$ і роботу [2].

Теорема 2. Однорідний матричний многочлен (1) розкладається на лінійні множники $A(x, y) = A_0(E x - B_1 y)(E x - B_2 y) \dots (E x - B_s y)$, тоді і тільки тоді, коли $\det R \neq 0$, де

$$R = \begin{bmatrix} P_0 & P_1 & \dots & P_{s_n} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & P_0 & P_1 & \dots & P_{s_n} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \ddots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & P_0 & P_1 & \dots & P_{s_n} \\ S_n(S_n-1)P_0 & (S_n-1)(S_n-2)P_1 & \dots & 2P_{s_n-2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & S_n(S_n-1)P_0 & (S_n-1)(S_n-2)P_1 & \dots & 2P_{s_n-2} & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \ddots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & S_n(S_n-1)P_0 & (S_n-1)(S_n-2)P_1 & \dots & 2P_{s_n-2} \end{bmatrix},$$

$$p_k = \sum_{l_1 + \dots + l_n = sn - k} \begin{vmatrix} a_{11}^{(l_1)} & a_{12}^{(l_2)} & \dots & a_{1n}^{(l_n)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}^{(l_1)} & a_{n2}^{(l_2)} & \dots & a_{nn}^{(l_n)} \end{vmatrix}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, sn,$$

Доведення теореми опирається на взаємну простоту многочленів $\Delta(t)$ і $\Delta''(t)$, $t = x/y$ та роботу [2].

Відомо [1], що розклад матричного многочлена (1) на лінійні множники можливий також у випадках, якщо для многочленної матриці $A(t) = A_0 t^s + A_1 t^{s-1} + \dots + A_{s-1} t + A_s$:

- а) елементарні дільники матриці $A(t)$ лінійні;
- б) $\det A(t) = (t - a_1)^{k_1} (t - a_2)^{k_2} \dots (t - a_n)^{k_n}$, де a_j – попарно різні корені і $k_j \leq 2$ для всіх $j = 1, 2, \dots, n$;

в) $\sum_{j=1}^k l_j \geq (n-1)s$, де k – число попарно різних коренів характеристичного многочлена; $A(t)$, l_j – число елементарних дільників, які відповідають кореню a_j .

Використавши результати роботи [2], можна вказати зв'язок між коефіцієнтами характеристичного многочлена і слідами степенів матриць-коефіцієнтів матричного многочлена та застосувати їх до теореми 2.

1. Коляда Р.В., Мельник О.М. Факторизація однорідних многочленних матриць від двох змінних над довільним полем // Сучасні проблеми математики. Матеріали Міжнар. наук. конф. Ч. 1. Чернівці — К.: Ін-т математики НАН України. 1998. 2. Коляда Р.В. О некоторых свойствах коэффициентов характеристического многочлена полиномиальной матрицы // Методы исследования дифференциальных и интегральных операторов. К., 1989. 3. Прокіп В.М. Про факторизацію многочленних матриць від двох змінних над довільним полем // Доп. НАН України. 1996. № 5. 4. Morf M., Levy B., Kungs S.-Y. New results in 2-D system theorie. Part 1: 2-D polynomial matrices, factorizations and coprimeness // Proc. IEEE. 1977. v. 65, № 6. P. 861—872. 5. Prepelita V. Primitive matrices and factorizations // Studii si cercetari matematice. 1991. v. 43, № 1-2. P. 53-60.