

УДК 617. 964

ВЛАСТИВОСТІ ФУНДАМЕНТАЛЬНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ОСНОВНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ДЕЯКИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ ЗМІШАНОГО ТИПУ

Л.С. Парасюк, І.Л. Парасюк

У роботі розв'язуються задачі типу Діріхле і Неймана в явному вигляді за допомогою модифікованих циліндричних функцій, а також встановлюється зв'язок між фундаментальними розв'язками цих задач.

В работе решаются задачи типа Дирихле и Неймана в явном виде при помощи модифицированных цилиндрических функций, а также устанавливается связь между фундаментальными решениями этих задач.

У півплощині $y > 0$ розглядаються диференціальні рівняння в частинних похідних другого порядку еліптичного типу, що вироджуються на межі півплощини $y=0$, такого вигляду:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + y^\alpha \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \chi^2 U = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y} \left(y^\alpha \frac{\partial U}{\partial y} \right) - \chi^2 U = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} (y^\alpha U) - \chi^2 U = 0. \quad (3)$$

Для цих рівнянь розв'язуються основні крайові задачі у півплощині $y > 0$ в явному вигляді за допомогою функцій Макдональда і показується зв'язок між фундаментальними розв'язками даних задач.

Для рівняння (1) перша крайова задача ставиться так: знайти в півплощині $y > 0$ функцію $U(x, y)$, яка задовольняла б рівняння (1) і крайову умову

$$\lim_{y \rightarrow 0} U(x, y) = f(x). \quad (4)$$

Шукаючи розв'язок задачі (1), (4) у вигляді перетворення Фур'є, легко одержати її розв'язок у вигляді

$$U(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} G_{\alpha, \chi}(x - \xi, y) f(\xi) d\xi, \quad (5)$$

$$\text{де } G_{\alpha, \chi}(x - \xi, y) = \frac{2^{v+1} \chi^{\frac{v+1}{2}} y R^{\frac{-v-1}{2}}}{\Gamma(v) \sqrt{2\pi} (2-\alpha)^{2v}} K_{-\frac{1}{2}}(\chi \sqrt{R}). \quad (6)$$

$$\text{Тут введені позначення } V = \frac{1}{2-\alpha}; \quad R = \frac{4y^{2-\alpha}}{(2-\alpha)^2} + (x-\xi)^2.$$

Має місце така теорема:

Теорема 1. Якщо функція $f(x)$ парна, додатна й абсолютно інтегровна на $(-\infty, \infty)$, то для всіх дійсних $\alpha < 2$ існує в півплощині $y > 0$ єдиний розв'язок задачі (1), (4), який дається формулами (5), (6).

Друга крайова задача для рівняння (1) ставиться з умовою

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\partial U}{\partial y} = f(x). \quad (7)$$

Розв'язок задачі (1), (7) дається формулами

$$U(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} N_{\alpha, \chi}(x - \xi, y) f(\xi) d\xi, \quad (8)$$

$$\text{де } N_{\alpha, \chi}(x - \xi, y) = \frac{-(2 - \alpha)^{2\nu-1} R^{\frac{\nu-1}{2}}}{2^{\nu-1} \Gamma(1 - \nu) \sqrt{2\pi} \chi^{\frac{\nu-1}{2}}} K_{\frac{\nu-1}{2}}(\chi \sqrt{R}). \quad (9)$$

Має місце така теорема:

Теорема 2. Якщо функція $f(x)$ парна, додатна й абсолютно інтегровна на $(-\infty, \infty)$, то для всіх дійсних $\alpha < 1$ існує в півплощині $y > 0$ розв'язок задачі (1), (7), який дається формулами (8), (9).

Перша крайова задача для рівняння (2) ставиться з умовою

$$\lim_{y \rightarrow 0} U(x, y) = f(x). \quad (10)$$

Розв'язок задачі (2), (10) дається формулами

$$U(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} G_{\alpha, \chi}^*(x - \xi, y) f(\xi) d\xi, \quad (11)$$

$$\text{де } G_{\alpha, \chi}^*(x - \xi, y) = \frac{2^{p+1} y^{1-\alpha} \chi^{\frac{p+1}{2}} R^{\frac{-p-1}{2}}}{\Gamma(p) \sqrt{2\pi} (2 - \alpha)^{2p}} K_{-\frac{p-1}{2}}(\chi \sqrt{R}). \quad (12)$$

$$\text{Тут } p = \frac{1 - \alpha}{2 - \alpha}.$$

Має місце така теорема:

Теорема 3. Якщо функція $f(x)$ парна, додатна й абсолютно інтегровна на $(-\infty, \infty)$, то для всіх дійсних $\alpha < 1$ існує в півплощині $y > 0$ розв'язок задачі (2), (10), який дається формулами (11), (12).

Друга крайова задача для рівняння (2) ставиться з умовою

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\partial U}{\partial y} = f(x). \quad (13)$$

Спеціальний вигляд крайової умови з вагою y^α зв'язаний з асимптотикою функції Макдональда. Розв'язок задачі (2), (13) дається формулами

$$U(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} N_{\alpha, \chi}^*(x - \xi, y) f(\xi) d\xi, \quad (14)$$

$$\text{де } N_{\alpha, \chi}^*(x - \xi, y) = \frac{-(2 - \alpha)^{2p-1} R^{\frac{p-1}{2}}}{2^{p-1} \Gamma(1 - p) \sqrt{2\pi} \chi^{\frac{p-1}{2}}} K_{\frac{p-1}{2}}(\chi \sqrt{R}). \quad (15)$$

Має місце така теорема:

Теорема 4. Якщо функція $f(x)$ парна, додатна й абсолютно інтегровна на $(-\infty, \infty)$, то для всіх дійсних $\alpha < 1$ існує в півплощині $y > 0$ розв'язок задачі (2), (7), який дається формулами (14), (15).

Перша крайова задача для рівняння (3) ставиться з умовою

$$\lim_{y \rightarrow 0} y^\alpha U(x, y) = f(x). \quad (16)$$

Розв'язок задачі (3), (16) дається формулами

$$U(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} G_{\alpha, \chi}^{**}(x - \xi, y) f(\xi) d\xi, \quad (17)$$

$$\text{де } G_{\alpha, \chi}^{**}(x - \xi, y) = \frac{2^{v+1} y^{1-\alpha} \chi^{\frac{v+1}{2}} R^{\frac{-v-1}{2}}}{\Gamma(v) \sqrt{2\pi} (2-\alpha)^{2v}} K_{-\frac{1}{2}} \left(\chi \sqrt{R} \right), \quad (18)$$

Має місце така теорема:

Теорема 5. Якщо функція $f(x)$ парна, додатна й абсолютно інтегровна на $(-\infty, \infty)$, то для всіх дійсних $\alpha < 1$ існує в півплощині $y > 0$ розв'язок задачі (3), (16), який дається формулами (17), (18).

Друга крайова задача для рівняння (3) ставиться з умовою

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial y} (y^\alpha U) = f(x). \quad (19)$$

Розв'язок задачі (3), (19) дається формулами

$$U(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} N_{\alpha, \chi}^{**}(x - \xi, y) f(\xi) d\xi, \quad (20)$$

$$\text{де } N_{\alpha, \chi}^{**}(x - \xi, y) = \frac{-(2-\alpha)^{2v-1} y^{-\alpha} R^{\frac{v-1}{2}}}{2^{v-1} \Gamma(1-v) \sqrt{2\pi} \chi^{\frac{v-1}{2}}} K_{\frac{1}{2}} \left(\chi \sqrt{R} \right). \quad (21)$$

Має місце теорема, аналогічна теоремам 2 і 4.

Використовуючи співвідношення між порядком функції Макдональда, що $1-v = p$ і $1-p = v$, легко одержати такий розв'язок між фундаментальними розв'язками вказаних крайових задач:

$$\frac{\partial N_{\alpha, \chi}}{\partial y} = G_{\alpha, \chi}^*, \quad (22)$$

$$y^\alpha \frac{\partial N_{\alpha, \chi}^*}{\partial y} = G_{\alpha, \chi}, \quad (23)$$

$$\frac{\partial N_{\alpha, \chi}^*}{\partial y} = G_{\alpha, \chi}^{**}, \quad (24)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(y^\alpha \frac{\partial N_{\alpha, \chi}^{**}}{\partial y} \right) = G_{\alpha, \chi}^*. \quad (25)$$

З (22) і (25) теж випливає, що

$$\frac{\partial N_{\alpha, \chi}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(y^\alpha \frac{\partial N_{\alpha, \chi}^{**}}{\partial y} \right), \quad (26)$$

а також існує ще два таких співвідношення, як

$$y^\alpha G_{\alpha,\chi}^{**} = G_{\alpha,\chi}, \quad (27)$$

$$y^\alpha N_{\alpha,\chi}^{**} = N_{\alpha,\chi}. \quad (28)$$

Зауважимо, що при $\alpha=0$ рівняння (1)–(3) переходять у рівняння Гельмгольца, а при $\chi=0$ — у рівняння Лапласа. Відповідно до цього розв'язки вказаних крайових задач набувають класичної форми задач типу Діріхле і Неймана для рівняння Гельмгольца і рівняння Лапласа.