УДК 539.3

ПРУЖНА РІВНОВАГА СМУГИ, НАВАНТАЖЕНОЇ ШТАМПОМ І ЗОСЕРЕДЖЕНИМИ СИЛАМИ

В.М. Гембара, Я.В. Максимович, В.І. Шваб'юк

Розглядається задача теорії пружності для смуги на двох опорах при навантаженні штампом і довільними зосередженими силами. Побудовано інтегральне рівняння задачі та проведено його чисельний розв'язок. Знайдено розв'язок задачі з невідомими границями контакту.

Рассматривается задача теории упругости для полосы на двух опорах, нагруженной штампом и произвольными сосредоточенными силами. Построено интегральное уравнение задачи и произведено его численное решение. Найдено решение задачи с неизвестными границами контакта.

Огляд робіт, присвячених дослідженню циліндричного згину пластин та балок штампами з використанням прикладних теорій і теорії пружності, наведено в [1,3]. Зазначимо, що контактні задачі теорії пружності досліджувались на основі розгляду смуги, навантаженої системою періодично прикладених штампів [1,6]. Такий підхід дозволяє достатньо точно врахувати опори тільки у випадку, коли відстань між штампом і опорами істотно перевищує товщину смуги.

У даній роботі розглядається задача теорії пружності для смуги $-H \le y \le 0$, що розміщена на двох опорах, при навантаженні штампом та довільно прикладеними засередженими силами. Приймемо: сили (X_j, Y_j) прикладені в т.(a_j, b_j), де ($j = \overline{1,M}$); штамп діє на границю y=0 в області a<x<b, причому a і b можуть бути невідомими; дотичні напруження між смугою, штампом і опорами відсутні; області контакту між смугою й опорами є малими в порівнянні з товщиною смуги, а тому реакції опор розглядаємо як зосереджені сили (0, Y_A), (0, Y_B), що прикладені в точках (A, -H), (B, -H).

1. Побудова інтегрального рівняння задачі. Для побудови інтегрального рівняння розглянемо допоміжну задачу теорії пружності для смуги, що навантажена зосередженими силами, прикладеними до довільних точок смуги, та розподіленим уздовж границі y=0 зусиллям p(x). Тут призначено $p(x)= (\sigma_{yy}+ i\ \tau_{xy})|_{y=0}$ і прийнято, що прикладене навантаження самозрівноважене.

При розв'язуванні задачі використано фундаментальний розв'язок для смуги. Для його побудови розглянуто задачу для смуги, що навантажена системою зосереджених самозрівноважених сил (A_j,B_j), які прикладені в довільних точках (α_j, β_j) ($j = \overline{1,J}$). З використанням [4] розв'язок такої задачі записано через комплексні потенціали Мусхелішвілі, які зображено як

$$\Phi(z) = \sum_{j=1}^{J}\left[A_j\Phi_1(x-a_j,y,b_j)+B_j\Phi_2(x-a_j,y,b_j)\ \right],$$

$$\Psi(z) = \sum_{j=1}^{J}\left[A_j\Psi_1(x-a_j,y,b_j)+B_j\Psi_2(x-a_j,y,b_j)\ \right], \tag{1}$$

де функції Φ_j (x,y,β), Ψ_j(x,y,β) складаються з відповідних розв'язків для півплощини y<0 або y>-H та функцій, що визначаються через швидкозбіжні інтеграли; z=x+iy.

Функції Φ_j, Ψ_j використовуються далі як фундаментальні розв'язки задачі. Зазначимо, що кожна з даних функцій безпосереднього фізичного змісту не має, оскільки не існує розв'язку задачі теорії пружності для смуги, яка навантажена тільки однією зосередженою силою.

Через введені розв'язки типу Гріна розв'язок допоміжної задачі набуває вигляду

$$\Phi(z) = \int\left[\tau_{xy}(\xi,0)\Phi_1(x-\xi,y,0) + \sigma_{yy}(\xi,0)\Phi_2(x-\xi,y,0)\right]d\xi + \Phi_*(z), \quad (2)$$

де $\Phi_*(z) = \sum_{j=1}^{J}\left[A_j\Phi_1(x-a_j,y,b_j) + B_j\Phi_2(x-a_j,y,b_j)\right]$.

При розв'язуванні контактної задачі потрібно визначити переміщення u, v на границі y=0, що виникають в області прикладеного навантаження. Для їх знаходження використаємо формулу [2]:

$$2G(u'+iv') = -\left[\sigma_{yy}(x,0) - i\tau_{xy}(x,0)\right] + (\chi+1)\Phi(z) \quad \text{при } z \to x, \quad (3)$$

де $u'+iv' = \frac{\partial}{\partial x}\left[u(x,0)+iv(x,0)\right]$; G — модуль зсуву; $\chi = \frac{3-\nu}{1+\nu}$ — для випадку плоского напруженого стану і $\chi = 3-4\nu$ — для випадку плоскої деформації. При $y \to 0$ маємо [2]

$$\Phi_j(x-\xi,y,0) = \frac{1}{2\pi(\xi-x)} + \Phi_j^0(x-\xi),(j=1,2), \quad (4)$$

де $\Phi_i^0(x)$ — гладкі обмежені функції.

Використовуючи формули Племеля--Сохоцького [2], після граничного переходу $y \to 0$, з (3) і (2) знаходимо

$$\begin{aligned} 2G(u'+iv') &= \frac{\chi-1}{2}\left[\sigma_{yy}(x,0) - i\tau_{xy}(x,0)\right] + (\chi+1)\Phi_*(x) + (\chi+1)\times \\ &\times \int\left[\tau_{xy}^0(\xi)\Phi_1(x-\xi,y,0) + \sigma_{yy}^0(\xi)\cdot\Phi_2(x-\xi,y,0)\right]d\xi. \end{aligned} \quad (5)$$

Підінтегральні функції в (5) мають складові типу Коші (за інтеграли від яких приймають їх головне значення) та регулярні функції.

При побудові інтегрального рівняння приймемо, що дотичні напруження відсутні, штамп діє в області y=0, a<x<b, границя штампу описується функцією y=f(x); задано головний вектор P та момент M зовнішніх сил, що прикладені до штампа, тобто задано

$$\int_a^b \sigma(\xi)d\xi = P, \int_a^b (\xi-c)\sigma(\xi)d\xi = M. \quad (6)$$

Тут $\sigma(\xi) = \sigma_{yy}(\xi,0)$ — невідомі нормальні напруження під штампом; c=(a+b)/2.

Тоді інтегральне рівняння поставленої контактної задачі матиме вигляд

$$2G(f'+\gamma) = \int_a^b \sigma(\xi)K(x-\xi)d\xi + Y_A\varphi(x-a) + Y_B\varphi(x-b) + \varphi_0(x), \quad (7)$$

де γ — тангенс кута повороту, на який може повертатись штамп при навантаженні;

$$K(x-\xi) = (\chi+1)\operatorname{Im}\Phi_2(x-\xi,0,0),$$
$$\varphi(x) = (\chi+1)\operatorname{Im}\Phi_2(x,0,-H),$$
$$\varphi_0(x) = (\chi+1)\operatorname{Im}\sum_{j=1}^{M}\left[X_j\Phi_1(x-a_j,0,b_j) + Y_j\Phi_2(x-a_j,0,b_j)\right].$$

Для визначення невідомих σ(ξ), γ, Y_A, Y_B, що входять у рівняння (7), слід додати умови рівняння (6) та рівноваги всіх сил, що прикладені до смуги:

$$
\begin{aligned}
&Y_A + Y_B + P + \sum_{j=1}^{M} Y_j = 0,\\
&\int_a^b \sigma(\xi)\xi d\xi + \sum_{j=1}^{M}(Y_j a_j - X_j b_j) + Y_A A + Y_B B = 0.
\end{aligned} \tag{8}
$$

Зазначимо, що для рівноваги сил необхідне виконання додаткової умови $\sum_j X_j = 0.$

2. Чисельний розв'язок інтегральних рівнянь. Розглянемо спочатку випадок, коли область контакту задана. Тоді реакції опор можуть бути визначені з рівнянь (8):

$$Y_A = \frac{\widetilde{M} - B\widetilde{Y}}{A - B};\ Y_B = \frac{\widetilde{M} - A\widetilde{Y}}{B - A},$$

де $\widetilde{Y} = -\sum_{j=1}^{M} Y_j - P;\ \widetilde{M} = -\sum_{j=1}^{M}(Y_j a_j - X_j b_j) - (M - cP).$

Контактні напруження та величина γ знаходяться з рівняння (7) та умов (6).

Для розв'язання інтегрального рівняння (7) застосуємо метод механічних квадратур [5]. Для цього використаємо квадратурну формулу для інтеграла

$$S(x) = \int_a^b \sigma(\xi)F(x-\xi)d\xi, \tag{9}$$

де F(x) складається з ядра типу Коші та регулярної функції; $\sigma(\xi) = \dfrac{U(\xi)}{\sqrt{(\xi-a)(b-\xi)}}$; $U(\xi)$ — регулярна функція. Використавши заміну змінних $\xi = l\cdot\theta + c$, $x = l\eta + c$, $l = (b-a)/2$, запишемо (9) як

$$S(l\eta + c) = \int_{-1}^{1} \frac{U_*(\theta)}{\sqrt{1-\theta^2}} F(l(\eta - \theta))d\theta, \tag{10}$$

де $U_*(\theta) = U(l\theta + c)$. Для даного інтеграла застосуємо квадратурну формулу Лобатто, яка має вигляд

$$\int_{-1}^{1} \frac{W(q)}{\sqrt{1-q^2}} \Omega(h-q)dq = \sum_{n=1}^{N} L_n W_n \Omega(h - q_n). \tag{11}$$

Тут

$$L_n = \begin{cases} \dfrac{\pi}{N-1}, n = 2,\ldots, N-1; \\ \dfrac{\pi}{2(N-1)}, n = 1, N; \end{cases} \qquad \theta_n = \begin{cases} \cos\dfrac{\pi(n-1)}{N-1}, n = 2,\ldots,N-1; \\ -1, \quad n = 1; \\ 1, \quad n = N. \end{cases}$$

Формула (11) справедлива при всіх значеннях η, якщо $\Omega(y)$ є гладкою функцією. У випадку, коли $\Omega(y) = 1/y$ (ядро типу Коші), то формула (11) справедлива для значень

$$h = h_j = \cos\left[\frac{p(j-0{,}5)}{N-1}\right], j = \overline{1; N-1}.$$

Використовуючи (11), для інтеграла (10) отримаємо

$$S(x_j) = \sum_{n=1}^{N} L_n U_n F(x_j - \xi_n), = 1,\ldots, N-1,$$

де $x_j = \ell\eta_j + c; \xi_n = \ell\theta_n + c; U_n = U(\xi_n)$. Застосовуючи дану формулу та формулу (11) до рівнянь (7) і (6), дістанемо замкнену систему алгебраїчних рівнянь

$$\begin{aligned}&2G\gamma-\sum_{n=1}^{N}L_nU_nK(x_j-\xi_n)=\delta_j, j=\overline{1,N-1},\\&\sum_{n=1}^{N}L_nU_n=P,\sum_{n=1}^{N}(\xi_n-c)L_nU_n=M\end{aligned} \quad (12)$$

відносно невідомих U_n, $\left(n=\overline{1,N}\right)$ і γ. Тут $\delta_j=Y_A\varphi(x_j-A)+Y_B\varphi(x_j-B)-2Gf'(x_j)$.

*3. **Розв'язок задачі з невідомими границями контакту.*** У контактних задачах штамп може відставати в околі своїх границь.У таких випадках границі області контакту стають невідомими і визначаються з умови обмеженості напружень.

Розглянемо детально задачу, коли невідома ліва границя (тобто величина a). Приймемо, що момент M зумовлений тим, що сила прикладена до штампа ексцентрично. Тобто $M=P((b-a)/2-d)$, де d — відстань від точки прикладання сили до точки (b,0).

Оскільки в даному випадку задача стає нелінійною відносно невідомої a, розв'язуватимемо її таким чином. Задамо величину a (ліву границю контакту), а величину P вважатимемо невідомою. Тоді умови (6) та умови рівноваги запишемо як

$$\begin{aligned}&Y_A+Y_B+P=-\sum_{j=1}^{M}Y_j\ ;\\&AY_A+BY_B+(b-d)P=\sum_{j=1}^{M}(Y_ja_j+X_jb_j);\\&P=\int_a^b\sigma(\xi)d\xi,\ \int_a^b(\xi-c)\sigma(\xi)d\xi=P(\frac{b-a}{2}-d).\end{aligned} \quad (13)$$

Відтак на основі рівнянь (7) і (13) з врахуванням обмеженості напружень в точці $x=a$ система рівнянь матиме вигляд

$$\begin{aligned}&2G\gamma-\sum_{n=1}^{N}L_nU_nK(x_j-\xi_n)-Y_A\varphi(x_j-A)-Y_B\varphi(x_j-B)=\varphi_0(x_j)-2Gf'(x_j),\ j=\overline{1,N-1};\\&U_1=0\,;P-\sum_{n=1}^{N}L_nU_n=0\,;\\&P(\frac{b-a}{2}-d)-\sum_{n=1}^{N}L_n(\xi_n-c)U_n=0\end{aligned} \quad (14)$$

та перших двох рівнянь (13).

Система (14) є замкненою системою лінійних рівнянь відносно невідомих $U_n\left(\overline{1,N}\right)$, Y_A, Y_B, γ, P.

Розглянемо випадок, коли обидві границі контакту (тобто величини a і b) невідомі. В даному випадку використаємо алгоритм розв'язування задачі, викладений в п.3. Величину b будемо знаходити методом половинного ділення. Для цього методом спроб встановлюємо два значення $b=b_1$ і $b=b_2$ (початкові наближення для b), при якому знайдені після розв'язування системи (14) невідомі U_N мають протилежні знаки. Наступними наближеннями для b будуть величини $(b_1+b_2)/2$ й одна із значень b_1 або b_2. Останні визначаються, як описано вище — з умови, що розв'язок U_N при $b=(b_1+b_2)/2$ і при $b=b_1$ ($b=b_2$) має різні знаки. Таким чином знаходимо b з наперед заданою точністю.

На основі розробленого алгоритму проведено дослідження напружено-деформованого стану смуги, опертої на дві опори і навантаженої штампом параболічної форми. Основа штампа описується функцією $f(x)=\delta+\frac{x^2}{2R}$. Опори розміщені симетрично відносно штампа на відстанні 2l одна від одної. Тут δ — осадка штампу; R — радіус кривини основи.

Результати розрахунків значень для безрозмірної величини $P^* = \frac{3}{4}(\chi+1)\frac{\ell R}{GH^3}P$ залежно від величини області контакту $b = a/\ell$ і відносної довжини $2\ell/H$. Тут *(-a, a)* — область контакту.

Значення безрозмірної величини P*

a/H	$2\ell/H$				
	0,5	2	4	10	20
0,03	0,001	0,004	0,008	0,021	0,041
0,2	0,049	0,162	0,279	0,491	0,659
0,4	0,230	0,472	0,637	0,815	0,898
0,8	2,716	1,149	1,032	1,013	1,006
1,0	-	1,700	1,186	1,067	1,032

Відмітимо, що результати розрахунків величини P* при $2\ell/H$=20 і a/ℓ=0,03; 0,1; 0,6; 0,8 з точністю до 0,1% збігаються з даними, наведеними в [1].

Таким чином, розроблений у роботі алгоритм дозволяє досліджувати контактні задачі для смуги при довільному розташуванні опор та штампа. Методика, яка використовувалась у роботах [1, 6], дає можливість отримати достовірні результати тільки при $\ell >> H$. Зазначимо, що при довільних навантаженнях область контакту не може перевищувати деяку величину $a/2\ell \sim 1$ (див. табл. при $2\ell/H = 0{,}5$, $a/H = 1$).

1. Григолюк Э.И., Толкачев В.М. Контактные задачи теории пластин и оболочек. М., 1980. 2. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., 1966. 3. Пелех Б.Л., Швабюк В.И. Об одном обобщении теории упругих трансверсально изотропных плит применительно к некоторым контактным задачам: Сб. Сопротивление материалов и теория сооружений. К., 1975. Вып. 26. 4. Прусов И.А. Об одном решении первой и второй основных задач теории упругости для полосы, лежащей на упругой полуплоскости // Изв. АН СССР. Мех. и маш. стр., 1964, № 4. 5. Саврук М.П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. К., 1981. 6. Keer L.M. and Silva M.A.G. Bending of a cantilever brought gradualle into contact with a cylindrical supporting surface. Int. J. mech. Sci. Pergam. Press. 1972, vol. 12. P. 751—760.