Ю. Ю. ТРОХИМЧУК
Кандидат физико-математических наук

О НЕКОТОРЫХ МНОЖЕСТВАХ ОСОБЫХ ТОЧЕК НЕПРЕРЫВНЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Если особое множество аналитической функции $f(z)$ проектируется в двух направлениях на множества линейной меры 0, то вблизи него $\iint|f'(z)|dxdy=\infty$ (3). Такое множество обязательно оказывалось разрывным и замкнутым.

Если распространять подобный результат и на множества, содержащие континуумы, появится необходимость в дополнительных ограничениях характера поведения функции вблизи такого особого множества. В самом деле, например, внешний вид любого ограниченного континуума, не разбивающего плоскость, всегда можно конформно отобразить на единичном круге $|w|<1$ некоторой ограниченной аналитической функцией $w=\varphi(z)$; очевидно, что интеграл Дирихле ее $\iint|\varphi(z)|^2dxdy$ и тем более интеграл $\iint|\varphi'(z)|dxdy$ конечны вблизи нашего континуума, и в то же время $\varphi(z)$ не аналитична (даже не непрерывна) в точках этого континуума.

Таким простейшим дополнительным ограничением мы считаем требование непрерывности аналитической функции на данном множестве. Существование аналитических функций, непрерывно продолжающихся на свои особые точки (которые образуют, следовательно, некоторое совершенное множество) было показано А. Данжуа (4) и В. В. Голубевым (1). Поэтому только требование непрерывной продолжимости аналитической функции на определенное множество не гарантирует еще аналитичности функции на самом этом множестве. Укажем на один класс множеств на плоскости, для которого вопрос об указанной аналитичности решается до конца.

Ограниченное множество K обладает свойством (T_2) в некотором направлении[1], если совокупность прямых, параллельных этому направлению и пересекающих K бесконечное количество раз, является множеством плоской меры 0. Спрямляемые кривые, например, обладают этим свойством даже в любом направлении. Многие сведения, относящиеся к свойству (T_2), можно найти в монографии С. Сакса (2). Напомним еще, что функция комплексного переменного $f(z)$ называется моногенной в некоторой точке z, если в этой точке она обладает конечной производной $f'(z)$.

Теорема. Если плоское ограниченное множество K обладает свойством (T_2) в двух параллельных направлениях, то для того, чтобы моногенная, в частности аналитическая, вне K и непрерывная на K функция

[1] Введение этого понятия принадлежит львовскому математику С. Банаху (1892—1945).

$f(z)$ была аналитической вне и на K, необходима и достаточна конечность интеграла $\iint\limits_{K/D} |f'(z)| dxdy$, взятого вблизи K, где D — ограниченная область, содержащая K.

Предположим, что указанные в теореме непараллельные направления суть направления осей x-ов и y-ов. Рассмотрим произвольный прямоугольник $R[x_1 \leqslant x \leqslant x_2;\ y_1 \leqslant y \leqslant y_2]$. Из суммируемости функции $|f'(z)| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2}$; если обозначить $f(z) = u + iv$, на R вытекает суммируемость всех частных производных $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$. По теореме Фубини

$$\iint\limits_R \frac{\partial u}{\partial x}\, dxdy = \int\limits_{y_1}^{y_2} dy \int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{\partial u}{\partial x}\, dx.$$

Почти для всех значений y из $[y_1, y_2]$ существует внутренний интеграл Лебега; из условий теоремы следует, что множество Γ_y этих значений можно выбрать таким, что $m\Gamma_y = y_2 - y_1$ и каждая прямая $y = \mathrm{const} \in \Gamma_y$ пересекает K не более чем в счетном множестве точек. Но для таких y внутренний интеграл $\int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{\partial u}{\partial x}\, dx = u(x_2, y) - u\ (x_1, y)$, так как непрерывная функция, обладающая суммируемой производной, существующей всюду, кроме не более, чем счетного множества точек, является функцией абсолютно непрерывной. Далее,

$$\int\limits_{y_1}^{y_2} dy \int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{\partial u}{\partial x}\, dx = \int\limits_{\Gamma_y} [u(x_2, y) - u(x_1, y)]\, dy = \int\limits_R u dy.$$

Аналогично вычисляются и остальные интегралы $\iint\limits_R \frac{\partial v}{\partial x}\, dxdy$ и т. д. Окончательно получим

$$-\iint\limits_R \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) dxdy + i \iint\limits_R \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) dxdy =$$

$$= \int\limits_R u dx - v dy + i \int\limits_R v dx + u dy = \int\limits_R f(z)\, dz.$$

Так как плоская мера K равна нулю, то условия Коши-Римана

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

в силу моногенности $f(z)$ вне K выполняются почти всюду в R и из предыдущего равенства следует

$$\int\limits_R f(z)\, dz = 0.$$

Поскольку прямоугольник R был взят произвольно, то из непрерывности $f(z)$ и обобщенной теоремы Морера вытекает, что функция $f(z)$ аналитична всюду в области, содержащей множество K.

Необходимость же теоремы очевидна.

Одним из простейших классов функций, обладающих конечным интегралом $\iint |f'(z)|dxdy$, даже конечным интегралом Дирихле, является класс ограниченных однолистных вблизи K аналитических функций. Поэтому однолистная аналитическая, всюду в области $D—K$ непрерывная функция, является аналитической и на любом множестве K внутри D, которое обладает свойством (T_2) в двух непараллельных направлениях.

Доказанная теорема не вытекает из известного результата Пэнлевэ о непрерывном продолжении аналитических функций через спрямляемую дугу, являющемся одновременно и аналитическим, так как можно построить даже кривую вида $y = f(x)$, обладающую свойством (T_2) (в направлении оси x-ов) и все же неспрямляемую ни в какой своей части. Всюду непрерывные аналитические функции с подобными особыми множествами построил еще А. Данжуа [4].

Одним из частных случаев класса множеств K, указанного в теореме, являются множества, проектирующиеся в двух непараллельных направлениях в множества линейной меры 0. Оказывается (1), что в этом случае теорема верна уже без всяких дополнительных ограничений относительно поведения функции $f(z)$ на K (но при условии конечности интеграла $\iint |f'(z)|dxdy$).

ЛИТЕРАТУРА

1. Голубев В. В. — Однозначные аналитические функции с совершенным множеством особых точек. М. (1916).

2. Сакс С. — Теория интеграла (1949).

3. Трохимчук Ю. Ю. — Об устранимых граничных множествах. Укр. Мат. журнал, IV, № 3 (1952).

4. Denjoy A. — Sur la continuite de fonctions analytiques singulières, Bull. Soc. Math. de France, LX (1932).