Ю. Ю. ТРОХИМЧУК
Кандидат физико-математических наук

О ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

В одной из своих статей В. С. Федоров (1) приводит известную проблему академика Н. Н. Лузина, относящуюся к изучению дифференциальных свойств произвольной непрерывной функции комплексного переменного. Именно для функций действительного переменного требуется изучить «производные числа» непрерывной функции точки $z=n+iy$. Пусть $f(z)$ — такая функция и $\varepsilon>0$ — некоторое число; множество всех значений отношения

$$\frac{f(z+\Delta_z)-f(z)}{\Delta z}=\frac{\Delta f}{\Delta z}$$

при всевозможных Δz, таких, что $0<|\Delta z|\leqslant\varepsilon$, обозначим через M Замыкание этого множества обозначим $\overline{M}_\varepsilon$. Пересечением всех $\overline{M}_\varepsilon$ (для данной точки z) является некоторое множество $\mathfrak{M}_z$; легко видеть, что оно является континуумом или точкой.

Из того, что множества M_ε (а следовательно, и их замыкания $\overline{M}_\varepsilon$) образуют монотонно убывающую совокупность множеств вместе со значениями числа ε, вытекает, что $\mathfrak{M}_z$ совпадает с пересечением множеств $\overline{M}_{\varepsilon_n}$, соответствующих произвольной последовательности чисел $\{\varepsilon_n\}$, стремящихся к нулю: $\varepsilon_n\to 0$, если $n\to\infty$.

Назовем комплексное число a производным числом функции $f(z)$ в некоторой точке z, если существует такая последовательность чисел $\{\Delta z_n\}$, $\Delta z_n\to 0$, что

$$\frac{f(z+\Delta z_n)-f(z)}{\Delta z_n}=\frac{\Delta f}{\Delta z_n}\to a.$$

Можно показать, что $\mathfrak{M}_z$ является множеством всех производных чисел функции $f(z)$ в точке z и только их. Отсюда, между прочим, вытекает, что необходимым и достаточным условием моногенности функции $f(z)$ в точке z является следующее: множество $\mathfrak{M}_z$ состоит лишь из одной точки (в конечной плоскости).

Мы покажем, что структура множеств $\mathfrak{M}_z$ во многом предопределяется дифференциальными свойствами компонент $u(x, y)$ и $v(x, y)$ функции $f(z)=u(x, y)+iv(x, y)$.

Теорема. Если функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ дифференцируемы в некоторой точке $z=x+iy$, то множество $\mathfrak{M}_z$ функции $f(z)=u+iv$ является окружностью или точкой.

Возьмем приращение $\Delta z=\Delta x+i\Delta y$ и предположим сначала, что

$\Delta x \neq 0$; введем обозначения $\frac{\Delta y}{\Delta x} = t$; $\Delta u = u(x + \Delta x, y + \Delta y) - u(x, y)$ $\Delta v = v(x + \Delta x, y + \Delta y) - v(x, y)$.

Тогда

$$\frac{\Delta f}{\Delta z} = \frac{\Delta u}{\Delta x + i\Delta y} + i\frac{\Delta v}{\Delta x + i\Delta y} = \frac{1 - it}{1 + t^2}\frac{\Delta u}{\Delta x} + i\frac{1 - it}{1 + t^2}\frac{\Delta v}{\Delta x} = U + iV,$$

где

$$\begin{cases} U = \frac{1}{1 + t^2}\left[\frac{\Delta u}{\Delta x} + t\frac{\Delta v}{\Delta x}\right] \\ V = \frac{1}{1 + t^2}\left[-t\frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x}\right]. \end{cases}$$

Устремим теперь Δz к нулю, причем так, чтобы отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ сохраняло постоянное значение t. Тогда в силу дифференцируемости функций u и v

$$\frac{\Delta u}{\Delta x} \to \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}t = a_1 + b_1 t,$$

$$\frac{\Delta v}{\Delta x} \to \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}t = a_2 + b_2 t.$$

Обозначим $arg\Delta z = \alpha$; тогда $t = \operatorname{tg}\alpha$ и

$$\frac{\Delta f}{\Delta z} \to U_\alpha + iV_\alpha,$$

где, как это можно проверить вычислением,

$$\begin{cases} U_\alpha = a_1\cos^2\alpha + (a_2 + b_1)\sin\alpha\cos\alpha + b_2\sin^2\alpha, \\ V_\alpha = a_2\cos^2\alpha + (b_2 - a_1)\sin\alpha\cos\alpha - b_1\sin^2\alpha. \end{cases}$$

Выше мы предположили, что $\Delta x \neq 0$; но непосредственная проверка показывает, что и при $\Delta x = 0$, т. е. при $\alpha = \pm\frac{\pi}{2}$, последние формулы также дают верные результаты: $U_{\frac{\pi}{2}} = \frac{\partial v}{\partial y}$, $V_{\frac{\pi}{2}} = -\frac{\partial u}{\partial y}$.

Докажем, что эта окружность и есть $\mathfrak{M}_z$. Пусть $a \in \mathfrak{M}_z$; тогда (см. выше) существуют $\{\Delta z_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, что $\Delta z_n \to 0$ и

$$\frac{f(z + \Delta z_n) - f(z)}{\Delta z_n} = \frac{\Delta f}{\Delta z_n} \to a.$$

Всегда можно выбрать, если это нужно, из последовательности $\{\Delta z_n\}$ подпоследовательность чисел, аргументы которых имеют определенный предел. Предположим поэтому, что уже данная последовательность $\{\Delta z_n\}$ обладает этим свойством, т. е. $arg\Delta z_n \to \alpha$.

Пусть $\Delta z_n = \Delta x_n + i\Delta y_n$; если $\alpha \neq \pm\frac{\pi}{2}$, то, как и раньше, получим, что

$$\frac{\Delta u}{\Delta x_n} \to \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}t,$$

$$\frac{\Delta}{\Delta x_n} \to \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} t,$$

(где $t = \operatorname{tg} \alpha$), так как $\frac{\Delta y_n}{\Delta x_n} \to \operatorname{tg} \alpha$. Если же $\alpha = \pm \frac{\pi}{2}$, то, используя соотношение $\frac{\Delta x_n}{\Delta y_n} \to 0$, придем к равенству

$$\lim \frac{\Delta f}{\Delta z_n} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Другими словами, всегда $\frac{\Delta f}{\Delta z_n} \to U_\alpha + iV_\alpha$, т. е. $a = U_\alpha + iV_\alpha$. Это и доказывает, что аффиксы точек нашей окружности исчерпывают все производные числа функции $f(z)$ в данной точке z.

Для функции $f(z) = x - iy$, например, множество $\mathfrak{M}_z$ в любой точке z является единичной окружностью; для функции $f(z) = x$ ($= Rez$) множество $\mathfrak{M}_z$ в каждой точке есть окружность $U^2 + V^2 = U$ и т. д.

Укажем еще на один пример функции, одно из множеств $\mathfrak{M}_z$ которой не является жордановой кривой; из теоремы вытекает, что, по крайней мере, одна из компонент этой функции недифференцируема в соответствующей точке. Вот эта функция: $f(z) = \sqrt{|xy|}$; в точке $z = 0$ $\mathfrak{M}_0$ является парой скрещенных лемнискат. И самом деле, функция действительных переменных $\sqrt{|xy|}$ недифференцируема при $x = 0$, $y = 0$.

$\mathfrak{M}_z$ может содержать и внутренние точки: был найден пример функции (2), для нее в некоторой точке $\mathfrak{M}_z$ было кругом положительного радиуса. Укажем на более простой пример функции $f(z)$ для которой множество $\mathfrak{M}_z$ почти для каждой точки z является полной плоскостью (т. е. за исключением, быть может, множества точек плоской меры нуль в любом конечном круге).

Положим $f(z) = \varphi(x) + i\psi(y)$, где $\varphi(x)$ и $\psi(y)$—непрерывные, нигде не дифференцируемые функции, причем почти для всех значений своих аргументов имеют место равенства Данжуа:

$$\overline{\varphi}^+(x) = \overline{\varphi}^-(x) = +\infty, \qquad \underline{\varphi}^+(x) = \underline{\varphi}^-(x) = -\infty$$
$$\overline{\psi}^+(y) = \overline{\psi}^-(y) = +\infty, \qquad \underline{\psi}^+(x) = \underline{\psi}^-(x) = -\infty^{*)}.$$

Пусть x и y—именно такие значения аргументов и $z = x + iy$ Тогда

$$\frac{\Delta f}{\Delta z} = \frac{\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x + i\Delta y} + i \frac{\psi(y + \Delta y) - \psi(y)}{\Delta x + i\Delta y} =$$
$$= \frac{1 - it}{1 + t^2} \frac{\Delta \varphi}{\Delta x} + it \frac{1 - it}{1 + t^2} \frac{\Delta \psi}{\Delta y} = U + iV,$$

---

*) $\overline{F}^+(x) = \overline{\lim\limits_{\Delta x \to +0}} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x}$, $\overline{F}^-(x) = \overline{\lim\limits_{\Delta x \to -0}} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x}$ и т. д.

где

$$\begin{cases} U = \dfrac{1}{1+t^2}\left[\dfrac{\Delta\varphi}{\Delta x} + t^2 \dfrac{\Delta\psi}{gy}\right] \\ V = -\dfrac{t}{1+t^2}\left[\dfrac{\Delta\varphi}{\Delta x} - \dfrac{\Delta\psi}{\Delta y}\right] \end{cases}$$

$$t = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Возьмем произвольные числа U_o и V_o; покажем, что существуют произвольно малые Δx и Δy, такие, что $U = U_o$ и $V = V_o$. Решая систему

$$\begin{cases} U = U_o, \\ V = V_o, \end{cases}$$

предполагая, что $V_o \neq 0$, найдем

$$\begin{cases} \dfrac{\Delta\varphi}{\Delta x} = U_o - V_o \dfrac{\Delta y}{\Delta x}, \\ \dfrac{\Delta\psi}{\Delta y} = U_o + V_o \dfrac{\Delta x}{\Delta y} \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \Delta y = \dfrac{1}{V_o}\left(U_o - \dfrac{\Delta\varphi}{\Delta x}\right)\cdot\Delta x, \\ \Delta x = \dfrac{1}{V_o}\left(\dfrac{\Delta\psi}{\Delta y} - U_o\right)\cdot\Delta y. \end{cases} \qquad [1]$$

Каждому значению Δx по первому равенству из [1] соответствует определенное значение Δy, т. е. Δy является при этом функцией от Δx. Эта функция непрерывна всюду: в самом деле, если $\Delta x \neq 0$, то это следует из непрерывности $\Delta\varphi = \varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)$ как функции от Δx (при фиксированном значении x). Если же $\Delta x = 0$, то при $\Delta x \to 0$

$$\Delta y = \frac{1}{V_o}(U_o \cdot \Delta x - \Delta\varphi) \to 0,$$

так как $\Delta\varphi \to 0$ в силу непрерывности $\varphi(x)$ как функции от x.

Крайние предельные значения производных чисел функции Δy в точке $\Delta x = 0$, т. е. величины отношения $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$, будут, очевидно, те же, что и для отношения $\frac{\Delta\varphi}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$, так как

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{V_o}\left(U_o - \frac{\Delta\varphi}{\Delta x}\right).$$

Итак,

$$(\overline{\Delta y})^+ = (\overline{\Delta y})^- = +\infty. \qquad (\underline{\Delta y})^+ = (\underline{\Delta y})^- = -\infty$$

в точке $\Delta x = 0$*).

*)На самом же деле эти соотношения имеют место почти при всех значениях Δx, но нам это не понадобится.

График функции Δy является, следовательно, непрерывной кривой, простирающейся вдоль горизонтальной прямой, проходящей через нашу точку (x, y), с указанной особенностью в этой точке (так как при $\Delta x = 0$ и $\Delta y = 0$, а это, собственно, и есть точка (x, y).

Совершенно так же второе равенство из [1] определяет Δx как непрерывную функцию Δy, причем

$$(\overline{\Delta x})^+ = (\overline{\Delta x})^- = +\infty, \qquad (\underline{\Delta x})^+ = (\underline{\Delta x})^- = -\infty$$

в точке $\Delta y = 0$.

График этой функции Δx представится непрерывной кривой, простирающейся вдоль вертикальной прямой, проходящей через точку (x, y) с указанной особенностью в этой точке.

В силу этих особенностей построенные кривые должны пересекаться в бесконечном множестве точек, находящихся в произвольной близости от точки (x, y). Очевидно, что каждая такая точка пересечения дает искомые Δx и Δy, так как для них выполняются одновременно равенства [1], а вместе с ними и равенства: $U = U_o$ и $V = V_o$.

Если теперь $V_o = 0$, то положим $\Delta y = 0$.

Тогда

$$\frac{\Delta f}{\Delta z} = \frac{\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x};$$

в силу равенств Данжуа последнее отношение при произвольно малом Δx может принимать любое конечное значение, в частности, и значение $U_o = U_o + iV_o$.

Тем же способом можно показать, что, беря в качестве $\psi(y)$ вообще произвольную функцию (хотя бы и дифференцируемую), получим совершенно аналогичный предыдущему пример функции $f(z)$, которая почти в каждой точке z обладает какими угодно производными числами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Федоров В. С. — Труды Н. Н. Лузина по теории функций комплексного переменного, УМН, VIII, 2 (48) (1952).

2. Тайманов А. Д. — Об одной задаче Н. Н. Лузина, УМН, VIII, 5 (57) (1953).