Украинский полиграфический институт имени Ивана Федорова
Том XII, часть 1 Научные записки 1958

Л. Н. ЛИСЕВИЧ

ТЕОРЕМЫ УСРЕДНЕНИЯ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В этой работе рассматриваются некоторые теоремы усреднения для гиперболической системы дифференциальных уравнений в частных производных, зависящей от малого положительного параметра. Полученные результаты представляют собой некоторое обобщение результатов Б. П. Демидовича [2], полученных в области обыкновенных дифференциальных уравнений.

1. Рассмотрим гиперболическую квазилинейную систему

$$\frac{\partial U_i}{\partial t}=\lambda_i(t, x, \varepsilon)\frac{\partial U_i}{\partial x}+f_i(t, x, U_1, \ldots, U_n, \varepsilon) \tag{1}$$
$$(i=1, 2, \ldots n),$$

которая зависит от малого положительного параметра ε и, кроме того, удовлетворяет условиям существования и единственности решения.

Положим

$$\overline{\lambda}_i(x)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}\lambda_i(t, x, \varepsilon)\,dt; \tag{2}$$

$$\overline{f}_i(x, U_1, \ldots, U_n)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}f_i(t, x, U_1, \ldots, U_n, \varepsilon)\,dt, \tag{3}$$

где $0<T<+\infty$.

Систему

$$\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial t}=\overline{\lambda}_i(x)\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x}+\overline{f}_i(x, \overline{U}_1, \ldots, \overline{U}_n) \tag{4}$$

будем называть предельной усредненной системой системы (1). Предположим, что функции $\lambda_i(t, x, \varepsilon)$ и $f_i(t, x, U_1 \ldots, U_n, \varepsilon)$ определены и непрерывные по совокупности переменных t, x, ε в области $t_0\leqslant t<+\infty$, $x_0\leqslant x\leqslant+\infty$, $0<\varepsilon<\varepsilon_0$, $(\varepsilon_0>0)$ и, кроме этого, функции $f_i(t, x, U_1, \ldots, U_n, \varepsilon)$ определены, непрерывны по $U_1, \ldots, U_n$ в некоторой области D n-мерного пространства $E^n=(U_1, \ldots, U_n)$ и дважды непрерывно дифференцируемы по t и x.

Теорема 1. Предположим, что для системи (1) удовлетворяются условия:

А) функции $\lambda_i(t, x, \varepsilon)$ и $f_i(t, x, U_1, \ldots, U_n, \varepsilon)$ равномерно ограничены по ε в каждой ограниченной части σ области изменения $t, x, U_1, \ldots, U_n$;

Б) на каждом множестве σ для функции $f_i(t, x, U_1, \ldots U_n, \varepsilon)$ удовлетворяется условие Липшица.

$$\left| f_i(t, x, \tilde{U}_1, \ldots, \tilde{U}_n, \varepsilon) - f_i(t, x, U_1, \ldots, U_n, \varepsilon) \right| \leqslant L_0 \cdot$$

$$\cdot \sum_{i=1}^{n} \left| \tilde{U}_i - U_i \right|,$$

где $i = 1, 2, \ldots, n$;

$L_0 = L_0(\sigma)$ не зависит от ε;

В) существуют конечные предельные средние значения (2) и (3), не зависящие от выбора T $(0 < T < +\infty)$.

Тогда для каждого решения $U_i = U_i(t, x, \varepsilon)$ системы (1) такого, что

$$\lim_{\varepsilon \to 0} U_i(t_0, x, \varepsilon) = \varphi_i(x) \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{5}$$

имеет место предельное соотношение

$$\lim_{\varepsilon \to 0} U_i(t, x, \varepsilon) = \overline{U}_i(t, x) \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{6}$$

где $\overline{U}_i = \overline{U}_i(t, x)$ — решение предельной усредненной системы (4), удовлетворяющее условию

$$\overline{U}_i(t_0, x) = \varphi_i(x). \tag{7}$$

Доказательство. Из условий В для произвольных чисел a и b имеем

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ \frac{1}{b-a} \int_a^b \left[f_i(t, x, U_1, \ldots, U_n, \varepsilon) - \overline{f}_i(x, U_1, \ldots, U_n \right] dt \right\} = 0. \tag{8}$$

Далее из условий А и В следует, что функции $\lambda_i(t, x, \varepsilon)$ и $f_i(t, x, U_1, \ldots, U_n, \varepsilon)$ на каждом ограниченном множестве σ ограничены по модулю постоянной $M(\sigma)$ и, кроме этого, функции $\overline{f}_i(x, U_1, \ldots, U_n)$, на σ удовлетворяют условию Липшица с постоянной $L_0(\sigma)$.

Положим

$$V_i(t, x, \varepsilon) = U_i(t, x, \varepsilon) - \overline{U}_i(t, x) \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{9}$$

Из уравнений (1), (4), и (9) получим

$$\frac{\partial V_i}{\partial t} = \lambda_i(t, x, \varepsilon) \frac{\partial V_i}{\partial x} + (\lambda_i - \overline{\lambda}_i) \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x} + f_i(t, x, V_1 +$$

$$+ \overline{U}_1, \ldots, V_n + \overline{U}_n, \varepsilon) - \overline{f}_i(x, \overline{U}_1, \ldots, \overline{U}_n) \tag{10}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n),$$

причем

$$\lim_{\varepsilon \to 0} V_i(t_0, x, \varepsilon) = \lim_{\varepsilon \to 0} \left[U_i(t_0, x, \varepsilon) - \overline{U}_i(t_0 x,) \right] = 0. \tag{11}$$

Запишем систему (10) в интегральной форме

$$V_i(t, x, \varepsilon) = V_i(t_0, x_i, \varepsilon) + \int\limits_{l_i} \Big\{ (\lambda_i - \overline{\lambda}_i) \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x} + f_i(t, x, V_1 + \overline{U}_1, \ldots, V_n + \overline{U}_n, \varepsilon) - \overline{f}_i(x, \overline{U}_1, \ldots, \overline{U}_n) \Big\} dt. \tag{12}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n),$$

где l_i — часть характеристики L_i от точки (t, x) до ее пересечения в некоторой точке (t_0, x_i) с прямой $t = t_0$.

Точки (t_0, x_i) и кривые L_i принадлежат области, ограниченной прямой $t = t_0$ и характеристиками L_1 и L_n системы уравнений (10).

Применяя метод последовательных приближений в некоторой области

$$t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + t', \ x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + x', \ (t' \leqslant \overline{t}, \ x' \leqslant \overline{x}),$$

для которой приближения $V_i^{(s)}(t, x, \varepsilon)$ $(s = 0, 1, 2, \ldots)$

по модулю не превосходят некоторого числа ρ, имеем

$$V_i(t, x, \varepsilon) = \lim_{s \to \infty} V_i^{(s)}(t, x, \varepsilon), \tag{13}$$

где

$$V_i^{(s)}(t, x, \varepsilon) = V_i(t_0, x_i, \varepsilon) + \int\limits_{l_i} \Big\{ (\lambda_i - \overline{\lambda}_i) \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x} + f_i(t, x, V_1^{(s-1)} + \overline{U}_1, \ldots, V_n^{(s-1)} + \overline{U}_n) - \overline{f}_i(x, \overline{U}_1, \ldots, \overline{U}_n) \Big\} dt \tag{14}$$

и

$$V_i^{(0)}(t, x, \varepsilon) = 0 \ (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{15}$$

Пусть $\eta < 0$ произвольно малое число и

$$\eta_0 = \min (\eta e^{-L_0 \tau} \rho e^{-L_0 \tau}), \tag{16}$$

где $\tau \geqslant \overline{t}$;

L_0 — постоянная Липшица.

Выберем $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(\eta) > 0$ столь малым, чтобы при $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$

$$\left| V_i(t_0, x_i, \varepsilon) \right| < \frac{1}{5} \eta_0 \ (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{17}$$

что возможно на основании формулы (11).

Оценим теперь первое приближение $V_i^{(1)}(t, x, \varepsilon)$.

Разбивая кривую l_i на достаточно мелкие части l_{i_k}

$(k = 1, 2, \ldots, m)$, из (14) имеем

$$V_i^{(1)}(t, x, \varepsilon) = V_i(t_0, x_i, \varepsilon) + \sum_{k=1}^{m} \int\limits_{l_{i_k}} \Big\{ (\lambda_i - \overline{\lambda}_i) \frac{\partial U_i}{\partial x} + f_i(t, x, \overline{U}_1, \ldots, \overline{U}_n, \varepsilon) - \overline{f}_i(x, \overline{U}_1, \ldots, \overline{U}_n) \Big\} dt =$$

$$= V_i(t_0, x_i, \varepsilon) + \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{\Delta t_k} \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} (\lambda_i - \overline{\lambda}_i) \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x} dt \cdot \Delta t_k +$$

$$+\sum_{k=1}^{m}\int_{t_{i_k}}\left\{f_i[t, x, \overline{U}_1(t, x), \ldots, \overline{U}_n(t, x), \varepsilon]-\right.$$

$$\left.-f_i[t, x, \overline{U}_1(t_k, x), \ldots, \overline{U}_n(t_k, x), \varepsilon]\right\}dt+$$

$$+\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{\Delta t_k}\int_{t_k}^{t_{k+1}}\left\{f_i[t, x, \overline{U}_1(t_k, x), \ldots, \overline{U}_n(t_k, x), \varepsilon]-\right.$$

$$\left.-\overline{f}_i[x, \overline{U}_1(t_k, x), \ldots, \overline{U}_n(t_k, x)]\right\}dt\cdot\Delta t_k+$$

$$+\sum_{k=1}^{m}\int_{t_{i_k}}\left\{\overline{f}_i[x, \overline{U}_1(t_k, x), \ldots, \overline{U}_n(t_k, x)]-\right.$$

$$\left.-\overline{f}_i[x, \overline{U}_1(t, x), \ldots, \overline{U}_n(t, x)]\right\}dt, \tag{18}$$

где $\Delta t_k = t_{k+1} - t_k$; $i = 1, 2, \ldots, n$.

Положим

$$N = \max\left|\frac{\partial\overline{U}_i}{\partial x}\right| \tag{19}$$

и выберем ε столь малым, чтобы при $0 < \varepsilon < \varepsilon_2(\eta)$

$$\left|\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{\Delta t_k}\int_{t_k}^{t_{k+1}}(\lambda_i-\overline{\lambda}_i)\frac{\partial\overline{U}_i}{\partial x}dt\cdot\Delta t_k\right| < \frac{1}{5}\eta_0, \tag{20}$$

$$\left|\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{\Delta t_k}\int_{t_k}^{t_{k+1}}\left\{f_i[t, x, \overline{U}_1(t_k, x), \ldots, \overline{U}_n(t_k, x), \varepsilon]-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\overline{f}_i\left[x, \overline{U}_1(t_k, x), \ldots, \overline{U}_n(t_k, x)\right]dt\cdot\Delta t_k\right\}\right| < \frac{1}{5}\eta_0, \tag{21}$$

что возможно в силу условия В и (19).

Из условия Б при $t_k \leqslant t \leqslant t_{k+1}$ найдем

$$|f_i[t, x, \overline{U}_1(t, x), \ldots, \overline{U}_n(t, x), \varepsilon] - f_i[t, x, \overline{U}_1(t_k, x), \ldots, \overline{U}_n(t_k, x), \varepsilon]| \leqslant$$

$$\leqslant L_0\cdot\sum_{i=1}^{n}\left|\overline{U}_i(t, x)-\overline{U}_i(t_k, x)\right| \leqslant L_0\cdot\sum_{i=1}^{n}\int_{t_k}^{t}\left|\frac{\partial\overline{U}_i}{\partial t}\right|dt \leqslant \tag{22}$$

$$\leqslant L_0\cdot\sum_{i=1}^{n}\int_{t_k}^{t}\left|\overline{\lambda}_i(x)\frac{\partial\overline{U}_i}{\partial x}\right|dx + L_0\cdot\sum_{i=1}^{n}\int_{t_k}^{t}\left|f_i(x, \overline{U}_1(t, x), \ldots, \overline{U}_n(t, x)\right|dt \leqslant$$

$$\leqslant 2nL_0 M\Delta t_k,$$

где $M = \max\left\{\left|\overline{\lambda}_i(x)\frac{\partial\overline{U}_i}{\partial x}\right|, \left|\overline{f}_i\left(x, \overline{U}_1, \ldots, \overline{U}_n\right)\right|\right\}$, $t_k \leqslant t \leqslant t_{k+1}$.

Если выбрать

$$\max \Delta t_k < \frac{\eta_0}{10\, n\, L_0\, M\tau}, \tag{23}$$

то получим

$$\Big| \sum_{k=0}^{m} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Big\{ f_i\,[t, x, \overline{U}_1(t, x), \ldots, \overline{U}_n(t, x), \varepsilon] - f_i\,[t, x, \overline{U}_1(t_k, x), \ldots, \overline{U}_n(t_k, x), \varepsilon] \Big\}\, dt \Big| \leqslant \leqslant \sum_{k=0}^{m} 2\, n\, L_0\, M\, (\Delta t_k)^2 < \frac{\eta_0}{5} \tag{24}$$

и аналогично

$$\Big| \sum_{k=0}^{m} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Big\{ \overline{f}_i\,[x, \overline{U}_1(t_k, x), \ldots, \overline{U}_n(t_k, x)] - \overline{f}_i\Big[x, \overline{U}_1(t, x), \ldots, \overline{U}_n(t, x)\Big]\Big\}\, dt \Big| < \frac{\eta_0}{5}. \tag{25}$$

Поэтому в силу неравенств (17), (20), (21), (24) и (25) из (18) следует, что

$$| V_i^{(1)}(t, x, \varepsilon) | < \eta_0. \tag{26}$$

Следовательно, в силу (16) получим

$$| V_i^{(1)}(t, x, \varepsilon) | < \rho \cdot e^{-L_0\tau} < \rho \tag{27}$$

$$| V_i^{(1)}(t, x, \varepsilon) | < \eta\, e^{-L_0\tau} < \eta \tag{28}$$

при $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + t'$, $x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + x'$ и $0 < \varepsilon < \breve{\varepsilon}(\eta)$,

где $\varepsilon = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$; $i = 1, 2, \ldots, n$.

Оценим теперь приближение $V_i^{(s)}(t, x, \varepsilon)$ при $s > 1$. Из формулы (14) имеем

$$V_i^{(s+1)}(t, x, \varepsilon) - V_i^{(s)}(t, x, \varepsilon) = = \int_{l_i} \Big\{ f_i(t, x, V_1^{(s)} + \overline{U}_1, \ldots, \overline{U}_n^{(s)} + \overline{U}_n, \varepsilon) - - f_i(t, x, V_1^{(s-1)} + U_1, \ldots, V_n^{(s-1)} + \overline{U}_n, \varepsilon) \Big\}\, dt. \tag{29}$$

Отсюда, используя условие Липшица, получим

$$| V_i^{(s+1)}(t, x, \varepsilon) - V_i^{(s)}(t, x, \varepsilon) | \leqslant \leqslant L_0 \cdot \int_{l_i} \sum_{i=1}^{n} \Big| V_i^{(s)}(t, x, \varepsilon) - V_i^{(s-1)}(t, x, \varepsilon) \Big|\, dt. \tag{30}$$

На основании формул (15) и (26) найдем

$$|V_i^{(2)} - V_i^{(1)}| \leqslant \eta_0 L_0 (t - t_0),$$

$$|V_i^{(3)} - V_i^{(2)}| \leqslant \eta_0 \frac{[L_0 (t - t_0)]^2}{2!},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\left| V_i^{(s)} - V_i^{(s-1)} \right| \leqslant \eta_0 \frac{[L_0 (t - t_0)]^{s-1}}{(s-1)!}, \quad (s = 0, 1, 2, \ldots).$$

Отсюда

$$|V_i^{(s)} (t, x, \varepsilon)| \leqslant \eta_0 e^{L_0(t-t_0)} \leqslant \min (\eta, \rho) \tag{31}$$

при $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + \bar{t}, \; x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + \bar{x}$.

Переходя к пределу при $s \to \infty$. из (31) получим

$$|V_i (t, x, \varepsilon)| \leqslant \eta$$

при $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + \bar{t}, \; x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + \bar{x}, \; 0 < \varepsilon < \bar{\varepsilon} (\eta)$.

Следовательно,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} U_i (t, x, \varepsilon) = \overline{U_i} (t, x,) \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

и теорема доказана.

Как следствие теоремы 1, можно сформулировать теорему усреднения для гиперболической линейной системы

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} = a_i (t, x, \varepsilon) \frac{\partial U_i}{\partial x} + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} (t, x, \varepsilon) U_j + b_i (t, x, \varepsilon) \tag{32}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n),$$

зависящую от малого параметра $\varepsilon > 0$ и удовлетворяющую условиям существования и единственности решения.

Положим

$$\overline{a_i}(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{T} \int_0^T a_i (t, x, \varepsilon) \, dt; \tag{33}$$

$$\overline{a_{ij}}(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{T} \int_0^T a_{ij} (t, x, \varepsilon) \, dt; \tag{34}$$

$$\overline{b_i} (x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{T} \int_0^T b_i (t, x, \varepsilon) \, dt. \tag{35}$$

Систему

$$\frac{\partial \overline{U_i}}{\partial t} = \overline{a_i} (x) \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x} + \sum_{i=1}^{n} \overline{a_{ij}} (x) \overline{U_j} + \overline{b_i} (x) \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{36}$$

будем называть предельной усредненной системой системы (32).

Теорема 2. Если коэффициенты $a_i(t, x, \varepsilon)$, $a_{ij}(t, x, \varepsilon)$ и свободные члены $b_i(t, x, \varepsilon)$ системы (32) равномерно ограничены по ε в каждой ограниченной части области изменения t, x, и для них существуют предельные средние значения, не зависящие от выбора числа T $(0 < T < +\infty)$ равномерно по x, и, кроме этого, для решения системы (32) существует конечный предел

$$\lim_{\varepsilon \to 0} U_i(t_0, x, \varepsilon) = \varphi_i(x),$$

то равномерно в каждой конечной области

$$t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + \bar{t}, \quad x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + \bar{x}$$

имеет место предельное соотношение

$$\lim_{\varepsilon \to 0} U_i(t, x, \varepsilon) = \overline{U}_i(t, x),$$

где $\overline{U}_i = \overline{U}_i(t, x)$ — решение предельной усредненной системы (36), удовлетворяющее начальным условиям

$$\overline{U}_i(t_0, x) = \varphi_i(x) \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Примечание. Теоремы 1 и 2 имеют место также и в том случае, если коэффициенты и свободные члены рассматриваемых систем являются равномерными почти периодическими функциями, разлагающимися в абсолютно и равномерно сходящиеся ряды Фурье, и для них существуют предельные средние значения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Демидович Б. П. О некоторых теоремах усреднения для обыкновенных дифференциальных уравнений. Матем. сб., т. 35, (77), № 1, 1954.

2. Петровский И. Г. Лекции об уравнениях с частными производными, М., 1953.

Л. С. ПАРАСЮК

ПЕРВАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В настоящей работе на основании результатов Я. Б. Лопатинского изучаются эллиптические системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и тремя независимыми переменными. Для таких систем ставится граничная задача, аналогичная задаче Дирихле для уравнения Лапласа, и доказывается ее разрешимость для полупространства. Подобный прием был ранее использован З. Я. Шапиро [2] при более частных предположениях.

1. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПОЛУПРОСТРАНСТВА

Рассматриваемые системы запишем в виде:

$$A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)U(x)=0, \tag{1}$$

где $A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ — квадратная операторная матрица порядка p;

$U\ (x)$ — столбец неизвестных функций высоты p.

Причем, будем считать, что система (1) второго порядка, однородная относительно операции дифференцирования. Такая система называется эллиптической, если форма порядка $2p$ относительно трех переменных α_1; α_2; α_3, заданная в виде детерминанта, отлична от нуля при всех действительных α, неравных нулю в совокупности, т. е.

$$\det A\ (\alpha)\neq 0,$$

где $\alpha = (\alpha_1;\ \alpha_2;\ \alpha_3)$ — заменены соответственно дифференцированию по x_1; x_2; x_3.

Для такой системы ставится граничная задача в полупространстве $x_3>0$: найти систему функций u_1; u_2; ... u_p, которые удовлетворяют в полупространстве $x_3>0$ системе дифференциальных уравнений (1) и некоторым наперед заданным граничным условиям $f(x_1;\ x_2)$.

В матричной форме эту задачу можно представить так:

$$A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)U(x)=0; \tag{1}$$

$$\lim_{x_3\to+0} U(x)=f\ (x_1;\ x_2), \tag{2}$$

где $f(x_1;\ x_2)$ — функциональный столбец высоты p;

$x = (x_1;\ x_2;\ x_3)$ — собирательная точка.

Так как (1) является эллиптической системой второго порядка относительно операции дифференцирования, то для действительных неравных нулю в совокупности α_1; α_2, корни α_3 $\det A(\alpha)=0$ будут комплексными. Половина корней α_3 лежит в верхней полуплоскости, половина — в нижней.

Для разрешимости задачи (1) (2) положим

$$\det\int\limits_{+} A^{-1}(\alpha)\,d\,(\alpha_3)\neq 0, \tag{3}$$

где $\bar{A}(\alpha)$ — матрица системы (1);

$A^{-1}(\alpha)$ ее обратная.

Символ $\int\limits_{+}$ — означает как интеграл по пути, охватывающем в положительном направлении α_3 корни $\det A(\alpha)=0$, лежащие в верхней α_3-полуплоскости.

Заметим, что в дальнейшем для сходимости интегралов используются только корни, лежащие в верхней полуплоскости, т. е. корни с положительной мнимой частью.

Формально решение задачи (1) (2) ищется в виде

$$U(x_1;x_2;x_3)=\frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int V(\alpha_1;\alpha_2;x_3)\,e^{i(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2)}d\alpha_1\,d\alpha_2. \tag{4}$$

Подставляя (4) в (1), (2), получим

$$A\left(i\alpha_1;\,i\alpha_2;\,\frac{\partial}{\partial x_3}\right)V(\alpha_1;\alpha_2;x_3)=0; \tag{5}$$

$$V(\alpha_1;\alpha_2,x_3)\Big|_{x_3=0}=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int f(y_1;y_2)\,e^{-i(y_1\alpha_1+y_2\alpha_2)}\,dy_1\,dy_2. \tag{6}$$

Для решения задачи (5) и (6) будет использован вычетный метод. Как известно, общее решение (5) может быть записано в виде

$$V(\alpha_1;\alpha_2;x_3)=\int\limits_{+} e^{ix_3\alpha_3}A^{-1}(\alpha)\,d\alpha_3\,C(\alpha_1;\alpha_2), \tag{7}$$

где $C=\frac{C_1}{2\pi i}$ — неизвестный столбец высоты p, который определяется из граничных условий.

Подставляя в (7) $x_3=0$, на основании (6) получим

$$\int\limits_{+} A^{-1}(\alpha)\,d\alpha_3\,C(\alpha_1;\alpha_2)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int f(y_1;y_2)\,e^{-i(y_1\alpha_1+y_2\alpha_2)}\,dy_1\,dy_2. \tag{8}$$

Так как по условию (3) $\det\int\limits_{+} A^{-1}(\alpha)\,d\alpha_3\neq 0$, то $C(\alpha_1;\alpha_2)$ определяется из системы (8) однозначно. Обозначая

$$P(\alpha_1;\alpha_2)=\int\limits_{+} A^{-1}(\alpha)\,d\alpha_3,$$

получим

$$C(\alpha_1;\alpha_2)=\overset{-1}{P}(\alpha_1;\alpha_2)\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int f(y_1;y_2)e^{-i(y_1\alpha_1+y\alpha_2)}\,dy_1\,dy_2. \tag{9}$$

Подставляя (9) в (7), а (7) в (4) и меняя порядок интегрирования, получим формально общее решение задачи (1), (2) в виде

$$U(x_1;x_2;x_3)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int \Phi(x_1-y_1;x_2-y_2;x_3)f(y_1;y_2)\,dy_1\,dy_2, \tag{10}$$

где

$$\Phi(x_1-y_1;x_2-y_2;x_3)=\frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int d\alpha_1\,d\alpha_2\int\limits_{+} d\alpha_3 e^{i[(x_1-y_1)\alpha_1+(x_2-y_2)\alpha_2+x_3\alpha_3]}A^{-1}(\alpha)\overset{-1}{P}(\alpha) \tag{11}$$

Фундаментальная матрица подобна потенциалу двойного слоя для уравнения Лапласа.

2. ОБОСНОВАНИЕ МЕТОДА

Займемся исследованием фундаментальной матрицы.

Теорема. Если $x_1^2+x_2^2\neq 0$, то фундаментальная матрица $\Phi(x_1-y_1;x_2-y_2;x_3)$ существует, непрерывная и ограниченная при $x_3>0$.

Доказательство. Действительно, подставляя в (11) $\alpha_1=\rho\beta_1$; $\alpha_2=\rho\beta_2$; $\alpha_3=\rho\beta_3$,

где $\beta_1=\cos\varphi$;

$\beta_2=\sin\varphi$,

получим

$$\Phi(x_1-y_1;x_2-y_2;x_3)=$$
$$=\frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_{+}d\alpha_3\,A^{-1}(\beta)P^{-1}(\beta')\int\limits_0^{+\infty}e^{i\rho[(x_1-y_1\beta_1+(x_2-y_2)\beta_2+x_3\beta_3]}\rho\,d\rho.$$

Интегрируя по частям по ρ, найдем

$$\Phi(x_1-y_1;x_2-y_2;x_3)=\frac{-1}{4\pi^2}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_{+}\frac{A^{-1}(\beta)P^{-1}(\beta')}{[(x_1-y_1)\beta_1+(x_2-y_2)\beta_2+x_3\beta_3]^2}d\beta_3. \tag{11'}$$

Из (11) следует, что при $x_3>0$ фундаментальная матрица $\Phi(x_1-y_1;x_2-y_2;x_3)$ существует, непрерывная и ограниченная, так как подинтегральное выражение нигде не обращается в бесконечность и путь интегрирования конечный.

Лемма 1. Если $x_1^2+x_2^2\neq 0$, то $\lim\limits_{x_3\to+0}\Phi(x)=0$.

Доказательство. Рассмотрим фундаментальную матрицу в виде

$$\Phi(x)=\frac{-1}{(2\pi)^2}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_{+}\frac{1}{(x,\beta)^2}\overset{-1}{A}(\beta)\overset{-1}{P}(\beta')\,d\beta_3,$$

где

$$(x_1\beta)=x_1\beta_1+x_2\beta_2+x_3\beta_3;\quad x=(x_1;x_2;x_3);\quad \beta=(\beta_1;\beta_2;\beta_3);\quad \beta'=(\beta_1;\beta_2).$$

Положим $d\varphi=\beta_1\,d\beta_2-\beta_2\,d\beta_1$, тогда

$$\Phi(x)=\frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_C(\beta_2\,d\beta_1-\beta_1\,d\beta_2)\int\limits_+\frac{1}{(x_1\beta)^2}\overset{-1}{A}(\beta)\overset{-1}{P}(\beta')\,d\beta_3. \tag{12}$$

Сместим контур C в комплексную плоскость так, чтобы выражение $x_1\beta_1+x_2\beta_2$ имело положительную мнимую часть, т. е.

$$Im\,(x_1\beta_1+x_2\beta_2)>0,$$

тогда

$$\lim_{x_3\to+0}\Phi(x)=\frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_{C'}\frac{\beta_2\,d\beta_1-\beta_1\,d\beta_2}{(x_1\beta_1+x_2\beta_2)^2},$$

где C' — смещенный контур.

Пусть $\beta_2\neq0$, тогда

$$\int\limits_{C'}\frac{\beta_2\,d\beta_1-\beta_1\,d\beta_2}{(x_1\beta_1+x_2\beta_2)^2}=\int\limits_L\frac{d\lambda}{(\lambda x_1+x_2)^2}\int\limits_L d\left(\frac{-1}{x_1(\lambda x_1+x_2)}\right)=0,$$

где $\lambda=\frac{\beta_1}{\beta_2}$.

Следовательно, $\lim\limits_{x_3\to+0}\Phi(x)=0$.

Как видно из (12), $\frac{\partial}{\partial x_k}\Phi(x)$. Это выражение можно представить в виде

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\Phi(x)=\frac{1}{|x|^3}H_k(x),$$

где $H_k(x)$ — ограниченная и непрерывная матрица, зависимая от коэффициента системы (1), а $|x|=\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}$.

Действительно, положим в (12) $(x,\beta)=\left(\frac{x}{|x|},\ \beta\right)|x|$,

получим

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\Phi(x)=\frac{1}{|x|^3}H_k(x), \tag{13}$$

где

$$H_k(x)=\frac{-2}{(2\pi)^2}\int\limits_{C'}\beta_2\,d\beta_1-\beta_1\,d\beta_2)\int\limits_+\frac{\beta_k}{\left(\frac{x}{|x|},\beta\right)^3}\overset{-1}{A}(\beta)\overset{-1}{P}(\beta')\,d\beta_3.$$

Лемма 2. Пусть $\lim\limits_{x_3\to+0}\Phi(x)=0$ при $x_1^2+x_2^2\neq0$ и

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\Phi(x)=\frac{1}{|x|^3}H_k(x),$$

тогда фундаментальная матрица $\Phi(x)$ может быть представлена в виде

$$\Phi(x)=\frac{x_3}{|x|^3}H(x),$$

где $H(x)$ — ограниченная и непрерывная матрица, зависимая от коэффициентов системы (1).

Доказательство. Рассмотрим точку $x=x(x_1; x_2; x_3)$ в пространстве $x_3>0$. Проекция точки x на плоскость $(x_1; x_2)$ даст точку $(x'=$ $=x'(x_1; x_2)$. Опишем радиусом-вектором $\vec{ox}$ дугу $\overset{\frown}{xA}$, где A — точка на плоскости $(x_1; x_2)$. Возьмем криволинейный интеграл по дуге $\overset{\frown}{xA}$ от полного дифференциала $\Phi(x)$, при этом получим

$$\int\limits_A^x \frac{\partial\Phi}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial\Phi}{\partial x_2}dx_2+\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}dx_3=\Phi(x)-\Phi(A).$$

Так как точка A лежит на границе $x_3=0$, то $\Phi(A)=0$.

Заменяя каждую производную $\frac{\partial}{\partial x_k}\Phi(x); (k=1, 2, 3)$ из (13), получим

$$\Phi(x)=\frac{1}{|x|^3}\int\limits_A^x\left[H_1\frac{dx_1}{ds}+H_2\frac{dx_2}{ds}+H_3\frac{dx_3}{ds}\right]ds=\frac{1}{|x|^3}M(x)\,r\varphi,$$

где $M(x)$ — среднее значение интеграла;
$r\varphi$ — длина дуги.

Следовательно,

$$\Phi(x)=\frac{x_3}{|x|^3}H(x),$$

где

$$x_3=r\sin\varphi;$$

$$H(x)=\frac{M(x)\varphi}{\sin\varphi}.$$

Рассмотрим некоторые интегральные свойства фундаментальной матрицы. Обозначим через S_a круг с центром в начале координат, тогда

$$\text{I. } \lim_{x_3\to+0}\iint\limits_{S_a}\Phi(x)\,dx_1\,dx_2=E,$$

где E — единичная матрица.

Действительно, рассмотрим фундаментальную матрицу в виде

$$\Phi(x)=\frac{-1}{(2\pi)^2}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_{+}A^{-1}(\beta)\;P^{-1}(\beta')\frac{d\beta^3}{(x,\beta)^3}.$$

тогда

$$\iint\limits_{S_a}\Phi(x)\,dx_1\,dx_2=\frac{-1}{(2\pi)^2}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_{+}A^{-1}(\beta)P^{-1}(\beta')\,d\beta_3\iint\limits_{S_a}\frac{dx_1dx_2}{(x,\beta)^2}. \tag{15}$$

Рассмотрим интеграл

$$I_a(x_3) = \iint\limits_{s_a} \frac{dx_1\, dx_2}{(x_1 \beta_1 + x_2 \beta_2 + x_3 \beta_3)^2}.$$

Обозначим $\beta' x' = z$, тогда, выбирая новую систему координат $(t \perp z)$, получим

$$\lim_{x_3 \to +0} I_a(x_3) = \lim_{x_3 \to +0} \int\limits_{-a}^{a} dt \int\limits_{-\sqrt{a^2-t^2}}^{\sqrt{a^2-t^2}} \frac{dz}{(z + \beta_3 x_3)^2} =$$

$$= \lim_{x_3 \to +0} \int\limits_{-a}^{a} dt \left\{ \frac{-1}{\sqrt{a^2 - t^2} + x_3 \beta_3} + \frac{1}{-\sqrt{a^2 - t^2} + x_3 \beta_3} \right\} =$$

$$= \int\limits_{-a}^{a} \frac{-2\, dt}{\sqrt{a^2 - t^2}} = -2 \arcsin \frac{t}{a} \Bigg|_{-a}^{a} = -2\pi.$$

Подставляя это выражение в (15), определим

$$\lim_{x_3 \to +0} \iint\limits_{s_a} \Phi(x)\, dx_1\, dx_2 = E.$$

Обозначим через Δ конечную или бесконечную область плоскости (x_1, x_2), не содержащую начала координат, тогда

$$\text{II.} \quad \lim_{x_3 \to +0} \iint\limits_{\Delta} \Phi(x)\, dx_1\, dx_2 = 0.$$

Для конечной области это свойство вытекает из леммы 2, бесконечной из свойства (1).

Обозначим через Δ_0 конечную или бесконечную область плоскости (x_1, x_2), содержащую начало координат, тогда

$$\text{III.} \quad \lim_{x_3 \to +0} \iint\limits_{\Delta_0} \Phi(x)\, dx_1\, dx_2 = E.$$

Справедливость этого свойства вытекает из I и II.

Теорема. Если система (1) эллиптического типа и $\det \int\limits_{+} A^{-1}(\alpha) d\alpha_3 \neq 0$, то существует решение системы (1), определенное всюду в области $x_3 > 0$ (10) и такое, что

$$\lim_{x_3 \to +0} U(x) = f(x_1; x_2),$$

где $f(x_1; x_2)$ — столбец из произвольных функций непрерывных во всей плоскости $(x_1; x_2)$ и ограниченных при $x_1^2 + x_2^2 \to \infty$.

Доказательство. На основании леммы 2 и ограничений относительно функций $f(x_1; x_2)$ интеграл

$$U(x)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int \Phi(x_1-y_1; x_2-y_2; x_3)\, f(y_1; y_2)\, dy_1\, dy_2$$

будет равномерно сходящийся в области $x_3>0$.

Применяя оператор системы (1) к формуле (10), получим

$$A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)U(x)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\Phi(x_1-y_1; x_2-y_2; x_3)\, f(y_1; y_2)\, dy_1\, dy_2.$$

Покажем, что

$$A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\Phi(x_1-y_1; x_2-y_2; x_3)=0.$$

Действительно, дифференцируя, найдем

$$A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\Phi(x_1-y_1; x_2-y_2; x_3)=$$

$$=\frac{-1}{(2\pi)^2}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{+} \frac{6\,A(\beta)\,A^{-1}(\beta)\,P^{-1}(\beta')}{[(x_1-y_1)\beta_1+(x_2-y_2)\beta_2+x_3\beta_3]^4}\, d\beta_3.$$

Так как $A(\beta)\, A^{-1}(\beta)=E$, то подинтегральное выражение не имеет полюсов и интеграл по замкнутому контуру равен нулю, т. е.

$$A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\Phi(x_1-y_1); x_2-y_2; x_3)=0.$$

Зададим произвольное число $\varepsilon>0$ и обозначим через S_ρ круг радиуса ρ в плоскости (y_1, y_2) с центром в точке $(x_1; x_2)$. Выберем ρ настолько малым, чтобы при $/y'-x'/\leqslant\rho$ колебания функции $f(x_1;x_2)$ не превосходило ε. Через Δ обозначим остальную область в плоскости $(y_1; y_2)$. Тогда в области S_ρ

$$f(y_1; y_2)=f(x_1; x_2)+\alpha(y_1; y_2);\quad |\alpha(y_1; y_2)|<\varepsilon.$$

Отсюда

$$U(x)=\iint\limits_{S_\rho}\Phi(x_1-y_1; x_2-y_2; x_3)\, dy_1\, dy_2\, f(x_1 x_2)+$$

$$+\iint\limits_{S_\rho}\Phi(x_1-y_1); x_2-y_2; x_3)\,\alpha(y_1; y_2)\, dy_1\, dy_2+$$

$$+\iint\limits_{\Delta}\Phi(x_1-y_1; x_2-y_2; x_3)\, f(y_1-y_2;)\, dy_1\, dy_2.$$

Обозначим

$$I_2=\iint\limits_{S_\rho}\Phi(x_1-y_1; x_2-y_2; x_3)\,\alpha(y_1; y_2)\, dy_1;\ dy_2;$$

$$I_3=\iint\limits_{\Delta}\Phi(x_1-y_1;\ x_2-y_2;\ x_3)f(y_1;\ y_2)\ dy_1\,dy_2$$

и займемся их оценкой.

$$\left|I_2\right|\leqslant\varepsilon\iint\limits_{S_\rho}\Phi(x_1-y_1;\ x_2-x_3)\,dy_1\,dy_2\leqslant$$

$$\leqslant\varepsilon_p\iint\limits_{S_\rho}\frac{Cx_3}{[(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+x_3^2]^{3/2}}\,dy_1\,dy_2,$$

где $C=\operatorname{Max}H(x)$;

$\Phi(x_1-y_1;\ x_2-y_2;x_3)$ заменена по лемме 2;

p — число уравнений. Обозначая

$$r=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2};\ dy_1\,dy_2=rdr\ d\Theta,$$

получим

$$\left|I_2\right|\leqslant\varepsilon p\,C\int\limits_0^{-p}dr\int\limits_0^{2\pi}\frac{x_3 r}{(r^2+x_3^2)^{3/2}}\,d\Theta=2\pi\,C_p\,x_3\,\varepsilon\int\limits_0^{\rho}\frac{rdr}{(r^2+x_3^2)^{3/2}}=$$

$$=2\pi C_p\,x_3\,\varepsilon\left[-(r^2+x_3^2)^{-1/2}\right]\Big|_0^{\rho}=2\pi\,C_p\,\varepsilon\left(1-\frac{x_3}{\sqrt{\rho^2+x_3^2}}\right)<2\pi\,Cp\,\varepsilon.$$

Следовательно, $|\,I_2\,|<2\pi Cp\varepsilon$.

$$\left|I_3\right|\leqslant\iint\limits_{\Delta}|\,\Phi(x_1-y_1;x_2-y_2;x_3)|\,|(f(y_1\,y_2)\,|\,dy_1\,dy_2\leqslant$$

$$\leqslant MCp\iint\limits_{\Delta}\frac{x_3}{[(x_1-y_1)+(x_2-y_2)+x_3^2]^{3/2}}\,dy_1\,dy_2,$$

где $M=\max\ f(y_1;y_2)$.

Так как при данном ρ в области Δ $y'\neq x'$, то

$$\left|I_3\right|<MCp\,x_3\int\limits_0^{2\pi}d\Theta\int\limits_{\rho}^{\infty}\frac{rdr}{r^3}=\frac{2\pi\,CMp\,x_3}{\rho}.$$

Следовательно, при $x_3\to 0$, $I_3\to 0$.

На основании свойства 1 и оценки $I_2:I_3$ определим

$$\lim_{x_3\to+0}U(x)=f(x_1;\,x_2).$$

Покажем, как из формулы (II′) можно получить формулы З. Я. Шапиро для фундаментальной матрицы.

Действительно, розбивая интеграл (II) по φ на сумму двух интегралов, имеем

$$\Phi(x_1-y_1;\,x_2-y_2;\,x_3)=\frac{1}{-4\pi^2}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}d\varphi\int\limits_{+}\frac{A^{-1}(\beta)\,P^{-1}(\beta')\,d\beta_3}{[(x_1-y_1)\,\beta_1+(x_2-y_2)\,\beta_2+x_3\,\beta_3]^2}+$$

$$+\frac{1}{-4\pi^2}\int\limits_{\pi/2}^{3\pi/2}d\varphi\int\limits_{+}\frac{A^{-1}(\beta)\,P^{-1}(\beta')\,d\beta_3}{[(x_1-y_1)\,\beta_1+(x_2-y_2)\,\beta_2+x_3\,\beta_3]^2}.$$

Положим

$$\beta_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{1+s^2}}\,;\ \beta_2 = \pm \frac{s}{\sqrt{1+s^2}}\,,$$

тогда

$$d\varphi = \pm \frac{ds}{1+s^2}\,,$$

и обозначая

$$t = \beta_3 \sqrt{1+s^2}\,;\ t = -\beta_3 \sqrt{1+s^2}\,,$$

найдем

$$\Phi(x_1-y_1;\, x_2-y_2;\, x_3) = \frac{1}{-4\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} ds \int\limits_{+} \frac{A^{-1}(s_1 t)\, P^{-1}(s)\, dt}{[x_1-y_1+s(x_2-y_2)+tx_3]^2} +$$

$$+ \frac{1}{-4\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} ds \int\limits_{-} \frac{A^{-1}(s_1 t)\, P^{-1}(s)\, dt}{[x_1-y_1+s(x_2-y_2)+\bar{t}x_3]^2}\,.$$

Вычисляя внутренние интегралы по теории вычетов, получим

$$\Phi(x_1-y_1;\, x_2-y_2;\, x_3) = \frac{1}{-4\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sum_{\alpha=1}^{\rho} \frac{b_\alpha(s)\, ds}{[x_1-y_1+s(x_2-y_2)+t_\alpha x_3]^2} +$$

$$+ \frac{1}{-4\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sum_{\alpha=1}^{\rho} \frac{\bar{b}_\alpha(s)\, ds}{[x_1-y_1+s(x_2-y_2)+\bar{t}_\alpha x_3]^2}\,.$$

Как легко видеть, матрица $b_\alpha(s)$ удовлетворяет тем условиям, которые ставятся в работе [2].

Теорема. Если детерминант $\Delta(\alpha)$*) и его транспонированный $\Delta'(\alpha)$ отличный от нуля, то и $\det\int\limits_{+} A_{\pi}^{-1}(\alpha)\, d\alpha_3 \neq 0$.

Доказательство. Запишем $\Delta(\alpha)$ и $\Delta'(\alpha)$ в развернутом виде

$$\Delta(\alpha) = \begin{vmatrix} b_{11}(\alpha_1), \dots & b_{11}(\alpha_p) \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ b_{p1}(\alpha_1), \dots & b_{p1}(\alpha_p) \end{vmatrix};\ \Delta'(\alpha) = \begin{vmatrix} b_{11}(\alpha_1), \dots & b_{p1}(\alpha_1) \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ b_{11}(\alpha_p), \dots & b_{p1}(\alpha_p) \end{vmatrix}.$$

Так как по условию $\Delta(\alpha) \neq 0$ и $\Delta'(\alpha) \neq 0$, то столбцы независимы. Представим интеграл $I = \int\limits_{+} A^{-1}(\alpha)\, d\alpha_3$ в виде

$$\int\limits_{+} A^{-1}(\alpha)\, d\alpha_3 = \int\limits_{+} \frac{1}{f(\alpha)} B(\alpha)\, d\alpha_3,$$

*) $\Delta\alpha$ — определитель, составленный из алгебраических дополнений фиксированной строки матрицы системы (I).

где $f(\alpha)=\det A(\alpha)$; $B(\alpha)$ — матрица, элементы которой являются алгебраическими дополнениями матрицы $A(\alpha)$, т. е.

$$B(\alpha)=\begin{vmatrix} b_{11}(\alpha), \dots & b_{p1}(\alpha) \\ \dots\dots & \dots \\ \dots\dots & \dots \\ b_{1p}(\alpha), \dots & b_{pp}(\alpha)\end{vmatrix}.$$

Вычисляя I по теории вычетов, получим

$$\int\limits_{+}\frac{1}{f(\alpha)}B(\alpha)d\alpha_3=2\pi i\left\{\frac{1}{f'(\alpha_1)}B(\alpha_1)+\dots+\frac{1}{f'(\alpha_p)}B(\alpha_p)\right\}. \tag{16}$$

Так как для каждого корня α_i $\det A(\alpha_i)=0$, то алгебраические дополнения соответствующих элементов каждых двух параллельных строк пропорциональны. Поэтому $B(\alpha)$ можно представить в виде

$$B(\alpha_i)=\begin{pmatrix} b_{11}(\alpha_i) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_{1p}(\alpha_i)\end{pmatrix}(1, C_2^{(i)}, \dots C_2^{(i)}); \tag{17}$$

$$C_2^{(i)}=\frac{b_{21}(\alpha_i)}{b_{11}(\alpha_i)}, \dots C_p^{(i)}=\frac{b_{p1}(\alpha i)}{b_{11}(\alpha_i)}. \tag{18}$$

На основании (17) формула (16) принимает вид

$$\int\limits_{+}\frac{1}{f(\alpha)}B(\alpha)\,d\alpha_3=2\pi i\left\{\frac{1}{f'(\alpha_1)}\begin{pmatrix} b_{11}(\alpha_1) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_{1p}(\alpha_1)\end{pmatrix}\left(1, C_2^{(1)}, \dots C_p^{(1)}\right)+\right.$$

$$\left.+\dots+\frac{1}{f'(\alpha_p)}\begin{pmatrix} b_{11}(\alpha_p) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_{1p}(\alpha_p)\end{pmatrix}\left(1, C_2^{(p)}, \dots C_p^{(p)}\right)\right\}.$$

Предположим, что $\det\int\limits_{+}A^{-1}(\alpha)\,d\alpha_3=0$, тогда существует такой столбец $T\neq 0$, что

$$\frac{1}{f'(\alpha_1)}\begin{pmatrix} b_{11}(\alpha_1) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_{1p}(\alpha_1)\end{pmatrix}\left(1, C_2^{(1)}, \dots C_p^{(1)}\right)\begin{pmatrix} T_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ T_p\end{pmatrix}+\dots+$$

$$+\frac{1}{f'(\alpha)_p}\begin{pmatrix} b_{11}(\alpha_p) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_{1p}(\alpha_p)\end{pmatrix}\left(1, C_2^{(p)}, \dots C_p^{(p)}\right)\begin{pmatrix} T_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ T_p\end{pmatrix}=0.$$

Так как по условию столбцы $\begin{pmatrix} b_{11} & (\alpha_i) \\ \cdot & \\ \cdot & \\ b_{1p} & (\alpha_i) \end{pmatrix}$ независимы, то их линейная комбинация равна нулю только в тех случаях, когда все коэффициенты равны нулю, т. е.

$$\left(1, C_2^{(1)}, \dots C_p^{(1)}\right)\begin{pmatrix} T_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ T_p \end{pmatrix} = 0;$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$\left(1, C_2^{(p)}, \dots C_p^{(p)}\right)\begin{pmatrix} T_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ T_p \end{pmatrix} = 0.$$

Подставляя $C^{(i)}$ из формулы (18), получим

$$\begin{vmatrix} b_{11}(\alpha_1), & \dots & b_{p1}(\alpha_1) \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{11}(\alpha_p), & \dots & b_{p1}(\alpha_p) \end{vmatrix} \begin{pmatrix} T_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ T_p \end{pmatrix} = 0.$$

Так как по условию $\Delta'(\alpha) \neq 0$, то $T = 0$. Следовательно,

$$\det \int\limits_{+} A^{-1}(\alpha)\, d\alpha_3 \neq 0.$$

Заметим, что обратная теорема неверна. Примером может быть система дифференциальных уравнений теории упругости в перемещениях, для которой $\det \int\limits_{+} A^{-1}(\alpha)\, d\alpha_3 \neq 0$, а $\Delta(\alpha) = 0$, и $\Delta'(\alpha) = 0$.

Теорема. Если детерминант $\Delta(\alpha)$ отличный от нуля, то ранг матрицы

$$\left(\int\limits_{+} A^{-1}(\alpha)\,(E, \alpha_3 E)\, d\alpha_3\right) = p,$$

где p — число уравнений; E — единичная матрица.

Доказательство. Предположим, что ранг $\left(\int\limits_{+} A^{-1}(\alpha)(E, \alpha_3 E) d\alpha_3\right) < p$, тогда существует такая строка $T \neq 0$, что

$$T \int\limits_{+} A^{-1}(\alpha)\,(E, \alpha_3 E)\, d\alpha_3 = 0,$$

или

$$T\int\limits_{+} A^{-1}(\alpha)\, d\alpha_3 = 0.$$

и

$$T\int\limits_{+} \alpha_3 A^{-1}(\alpha)\, d\alpha_3 = 0.$$

Покажем, что для произвольной полиномиальной матрицы $K(\alpha)$

$$T\int\limits_{+} A^{-1}(\alpha) K(\alpha)\, d\alpha_3 = 0.$$

Действительно, разделив выражения слева на $A(\alpha)$ по α_3, получим

$$K(\alpha) = A(\alpha)\, P(\alpha) + Q(\alpha),$$

где порядок $Q(\alpha) < 2$ и $Q(\alpha) = Q_1(\alpha')\, d_3 + Q_2(\alpha')$,

тогда

$$T\int\limits_{+} A^{-1}(\alpha) K(\alpha)\, d\alpha_3 = T\int\limits_{+} A^{-1}(\alpha)\left\{A(\alpha)\, P(\alpha) + Q(\alpha)\right\} d\alpha_3 =$$

$$= T\int\limits_{+} A^{-1}(\alpha)\, Q(\alpha)\, d\alpha_3 = T\int\limits_{+} \alpha_3 A^{-1}(\alpha) d\alpha_3\, Q_1(\alpha') + T\int\limits_{+} A^{-1}(\alpha)\, d\alpha_3\, Q_2(\alpha') = 0.$$

Следовательно, если это выражение действительно для произвольной полиномиальной матрицы $K(\alpha)$, то $K(\alpha)$ можно подобрать способом:

$$K(\alpha) = f'_{\alpha_3}(\alpha)\, \omega(\alpha) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

где $\omega(\alpha_1) = C_1, \ldots \omega(\alpha_p) = C_p$ — произвольные постоянные; $f'_{\alpha_3}(\alpha)$ — производная по α_3 от $f(\alpha)$.

Таким образом,

$$0 = T\int\limits_{+} \omega(\alpha) \frac{B(\alpha)}{f(\alpha)} f'_{\alpha_3}(\alpha) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} d\alpha_3 =$$

$$= T\int\limits_{+} \omega(\alpha) \frac{f'_{\alpha_3}(\alpha)}{f(\alpha)} \begin{pmatrix} b_{11}(\alpha) \\ \vdots \\ b_{11}(\alpha) \end{pmatrix} d\,(\alpha_3) = 2\pi i T \left\{ C_1 \begin{pmatrix} b_{11}(\alpha_1) \\ \vdots \\ b_{1p}(\alpha_1) \end{pmatrix} + \right.$$

$$\left. + \ldots + C_p \begin{pmatrix} b_{11}(\alpha_p) \\ \vdots \\ b_{1p}(\alpha_p) \end{pmatrix} \right\},$$

так как $C_1, C_2, \ldots C_p$ — произвольные постоянные, то

$$T\begin{pmatrix} b_{11}(\alpha_1) \\ \cdot \\ \cdot \\ b_{1p}(\alpha_1) \end{pmatrix} = 0, \ldots . T\begin{pmatrix} b_{11}(\alpha_p) \\ \cdot \\ \cdot \\ b_{1p}(\alpha_p) \end{pmatrix} = 0,$$

или

$$T\begin{pmatrix} b_{11}(\alpha_1), \ldots b_{11}(\alpha_p) \\ \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots \\ b_{1p}(\alpha_1), \ldots b_{1p}(\alpha_p) \end{pmatrix} = 0.$$

Но так как по условию $\Delta(\alpha) \neq 0$, то $T = 0$.

Следовательно, ранг матрицы

$$\left(\int_{+} A^{-1}(\alpha)(E, \alpha_3 E)\, d\alpha_3\right) = p.$$

Таким образом, условие З. Я. Шапиро выполняется в более ослабленном виде. Для примера приведем граничную задачу для статического уравнения теории упругости, которую методом [1] решить нельзя, так как форма* $f(\alpha)$ распадается на множители

$$\Delta U_1 + k\frac{\partial}{\partial x_1}\Theta = 0; \quad U_1(x)/_{x_3=0} = f_1(x_1; x_2);$$

$$\Delta U_2 + k\frac{\partial}{\partial x_2}\Theta = 0; \quad U_2(x)/_{x_3=0} = f_2(x_1; x_2);$$

$$\Delta U_3 + k\frac{\partial}{\partial x_3}\Theta = 0; \quad U_3(x)/_{x_3=0} = f_3(x_1; x_2);$$

$$k = \frac{\mu}{\lambda + \mu}; \quad \Delta U = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}; \quad \Theta = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3};$$

$$r = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + x_3^2}\,.$$

Решая приведенной выше схемой, получим

$$U(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int \Phi(x_1 - y_1; x_2 - y_2; x_3) f(y_1; y_2)\, dy_1\, dy_2,$$

где

$$\Phi(x_1 - y_1; x_2 - y_2; x_3) =$$

$$\begin{pmatrix} \frac{k x_3 [x_3^2 - 2(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2]}{(k+2) r^5} + \frac{x_3}{r^3} & \frac{-3k(x_1 - y_1)(x_2 - y_2) x_3}{(k+2) r^5} & \frac{3k(x_1 - y_1) x_3^2}{(k+2) r^5} \\ \frac{3k(x_1 - y_1)(x_2 - y_2) x_3}{(k+2) r^5} & \frac{k x_3 [x_3^2 + (x_1 - y_1)^2 - 2(x_2 - y_2)^2]}{(k+2) r^5} + \frac{x_3}{r^3} & \frac{-3k(x_2 - y_2) x_3^2}{(k+2) r^5} \\ \frac{3k(x_1 - y_1) x_3^2}{(k+2) r^5} & \frac{3k(x_2 - y_2) x_3^2}{(k+2) r^5} & \frac{k x_3 [-2x_3^2 + (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2]}{(k+2) r^5} + \frac{x_3}{r^3} \end{pmatrix}$$

---

* $f(\alpha)$ — детерминант системы (1) как форма порядка $2p$ относительно трех переменных α_1; α_2; α_3