

УЗАГАЛЬНЕННЯ ТЕОРЕМ ФАВАРА НА ВИПАДОК ЛІНІЙНОЇ СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З АНАЛІТИЧНИМИ МАЙЖЕ ПЕРІОДИЧНИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Л. М. ЛІСЕВИЧ

Розглянемо лінійну систему диференціальних рівнянь

$$(S_z) \frac{dw_i}{dz} = \sum_{j=1}^n f_{ij}(z) w_j + g_i(z) \quad (i=1, 2, \dots, n),$$

в якій $f_{ij}(z)$ і $g_i(z)$ — рівномірні майже періодичні (м. п.) функції. Й. Фаваром [1] було досліджено, що при деяких умовах, накладених на сім'ю однорідних систем, одержаних із системи (S_z) за допомогою зміщень системи (S_z) і при $g_i(z) = 0$, $(i=1, 2, \dots, n)$, система (S_z) має майже періодичні розв'язки. В цій статті буде досліджене питання майже періодичності розв'язку системи (S_z) у випадку, коли коефіцієнти $f_{ij}(z)$ і вільні члени $g_i(z)$ є аналітичні м. п. функції в деякій полосі $[\alpha, \beta]$, $z = x + iy$. Будемо вважати, що коефіцієнти $f_{ij}(z)$ і вільні члени $g_i(z)$ системи (S_z) є аналітичні м. п. функції в полосі $[\alpha, \beta]$ і, крім того,

$$W_i(z)|_{z=x_0} = \varphi_i(x_0), \quad x_0 \in [\alpha, \beta]. \quad (1)$$

Покажемо, що система (S_z) задовольняє умовам теореми існування і єдиності розв'язку в полосі $[\alpha, \beta]$.

При $z = x_0 + iy$ для системи (S_z) вірні теореми Фавара, тому що у цьому випадку $f_{ij}(z)$ і $g_i(z)$ є рівномірні м. п. функції дійсного змінного y .

Запишемо систему (S_z) при умові (1) в еквівалентній інтегральній формі

$$W_i(z) = W_i(x_0) + \int_{x_0}^z \left[\sum_{j=1}^n f_{ij}(z) W_j + g_i(z) \right] dz \quad (2)$$

$$(i=1, 2, \dots, n).$$

Побудуємо послідовні наближення до розв'язку системи (2) таким чином: покладемо

$$W_i^{(0)}(z) = \varphi_i(x_0) \quad (3_0)$$

$$W_i^{(1)}(z) = \varphi_i(x_0) + \int_{x_0}^z \left[\sum_{j=1}^n f_{ij}(z) W_j^{(0)} + g_i(z) \right] dz \quad (3_1)$$

і, взагалі,

$$W_i^{(k+1)}(z) = \varphi_i(x_0) + \int_{x_0}^z \left[\sum_{j=1}^n f_{ij}(z) W_j^{(k)} + g_i(z) \right] dz \quad (3_{k+1})$$

Якщо буде доведена рівномірна збіжність ряду

$$W_i^{(0)}(z) + \sum_{k=0}^{\infty} [W_i^{(k+1)}(z) - W_i^{(k)}(z)], \quad (4)$$

тобто буде доведена рівномірна збіжність послідовностей $W_i^{(k)}(z)$ в полосі $[\alpha, \beta]$, то система граничних функцій буде задовольняти рівнянням [2].

Для доведення рівномірної збіжності ряду (4) побудуємо для нього мажорантний ряд. Тому що $W_i^{(0)}(z)$ і $W_i^{(1)}(z)$ неперервні в полосі $[\alpha, \beta]$, то вони в цій полосі обмежені.

Покладемо

$$M = \max \{ |W_1^{(0)}|, \dots, |W_n^{(0)}|, |W_1^{(1)}|, \dots, |W_n^{(1)}| \}$$

в полосі $[\alpha, \beta]$. Тоді

$$\begin{aligned} |W_i^{(0)}(z)| &\leq M, \\ |W_i^{(1)} - W_i^{(0)}| &\leq 2M. \end{aligned}$$

Але $f_{ij}(z)$ є м. п. функції в полосі $[\alpha, \beta]$, отже, вони в цій полосі обмежені, тобто

$$|f_{ij}(z)| < A, \quad (A > 0), \quad (i, j = 1, 2, \dots, n).$$

Тоді

$$|W_i^{(2)}(z) - W_i^{(1)}(z)| \leq \int_{x_0}^z \sum_{j=1}^n |f_{ij}(z)| |W_j^{(1)} - W_j^{(0)}| dz \leq 2M \cdot nA (z - x_0),$$

$$|W_i^{(3)}(z) - W_i^{(2)}(z)| \leq \int_{x_0}^z \sum_{j=1}^n |f_{ij}(z)| |W_j^{(2)} - W_j^{(1)}| dz \leq 2M \cdot n^2 A^2 \frac{(z - x_0)^2}{2}.$$

Припустимо, що

$$|W_i^{(k)}(z) - W_i^{(k-1)}(z)| \leq 2M \frac{n^{k-1} A^{k-1} (z - x_0)^{k-1}}{(k-1)!}.$$

Тоді

$$\begin{aligned} &|W_i^{(k+1)}(z) - W_i^{(k)}(z)| \leq \\ &\leq \int_{x_0}^z \sum_{j=1}^n |f_{ij}(z)| \cdot |W_j^{(k)} - W_j^{(k-1)}| dz \leq 2M \frac{n^k A^k (z - x_0)^k}{k!}. \end{aligned}$$

Таким чином, згідно методу математичної індукції, для довільного k

$$|W_i^{(k+1)}(z) - W_i^{(k)}(z)| \leq 2M \frac{[nA(z - x_0)]^k}{k!}.$$

Тому, що мажорантний ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{[nA(z - x_0)]^k}{k!}$$

збіжний для всіх z , то ряд (4) рівномірно збіжний у всій полосі $[\alpha, \beta]$. що доводить існування і неперервність розв'язку системи (2) в полосі $[\alpha, \beta]$.

Доведемо тепер єдиність розв'язку системи (2) в полюсі $[\alpha, \beta]$. Припустимо, що ми маємо два розв'язки системи (2) в полосі $[\alpha, \beta]$:

$$W_1, W_2, \dots, W_n \text{ і } \tilde{W}_1, \tilde{W}_2, \dots, \tilde{W}_n.$$

Підставляючи ці розв'язки в систему (2) і віднімаючи, одержимо

$$W_i(z) - \tilde{W}_i(z) = \int_{x_0}^z \sum_{j=1}^n f_{ij}(z)(W_j - \tilde{W}_j) dz.$$

Покладемо

$$\max_{z \in [\alpha, \beta]} |W_i(z) - \tilde{W}_i(z)| = M > 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Тоді, проводячи повторні оцінки різниць

$$|W_i(z) - \tilde{W}_i(z)|,$$

як це робилось при доведенні теореми існування, одержимо

$$M \leq M \frac{[nA(z - x_0)]^k}{k!}$$

для довільного k , що приводить до суперечності, якщо тільки k буде достатньо великим. Отже $M = 0$ і

$$W_i(z) = \tilde{W}_i(z) \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

тобто розв'язок системи (2) єдиний.

Із доведення теореми існування і єдиності розв'язку системи (2) в полосі $[\alpha, \beta]$ і теореми Вейерштраса про голоморфні функції випливає, що розв'язки $W_i(z)$ є голоморфні функції в полосі $[\alpha, \beta]$.

Вкінці, користуючись теоремою, що якщо в полосі $[\alpha, \beta]$ функція $W(z)$ регулярна, то в довільній полосі $[\alpha_1, \beta_1]$, $\alpha < \alpha_1 < \beta_1 < \beta$, є обмежена і на прямій $x = x_0$, ($\alpha < x_0 < \beta$), $W(z)$ є рівномірна м. п. функція, то $W(z)$ є м. п. функція в довільній полосі $[\alpha_1, \beta_1]$, $\alpha < \alpha_1 < \beta_1 < \beta$, безпосередньо впливає вірність теорем Фавара для системи (S_z) .

ЛІТЕРАТУРА

1. J. Favard, Sur les équations différentielles à coefficients presque-périodiques, Acta math. 51 (1927).
 2. Б. М. Левитан, Почти-периодические функции, Москва, 1953.
 3. Дж. Сансоне, Обыкновенные дифференциальные уравнения, т. I, Москва, 1953.
- Примітка. Коротке повідомлення про результати роботи надруковано в «Доповідах АН УРСР», № 2, 1960.