

МАЙЖЕ ПЕРІОДИЧНІСТЬ РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ ХВИЛЬОВОГО РІВНЯННЯ У ВИПАДКУ МАЙЖЕ ПЕРІОДИЧНИХ ПОЧАТКОВИХ ДАНИХ

Л. М. ЛІСЕВИЧ

В роботі розглядаються випадки майже періодичності задачі Коші для диференціальних рівнянь струни, мембрани, газу, коли початкові умови є майже періодичні (м. п.) функції просторових координат. Майже періодичність встановлюється відносно просторових координат при обмежених значеннях змінної t . Зокрема, майже періодичність задачі Коші для струни встановлюється і по змінній t .

В дослідженні розглядаються рівняння вільних коливань, а також неоднорідні рівняння з майже періодичними правими частинами.

I. Однорідний випадок.

1. Розглянемо рівняння вільних коливань струни

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0 \quad (1.1.1.)$$

при умові, що

$$\left. \begin{aligned} U(0, x) &= \varphi_1(x) \\ U_t'(0, x) &= \varphi_2(x) \end{aligned} \right\} \quad (2.1.1.)$$

Теорема 1.1.1. Якщо $\varphi_1(x)$ і $\varphi_2(x)$ є майже періодичні функції, то обмежений розв'язок задачі (1.1.1.), (2.1.1.) є також майже періодична функція.

Доведення.

Як відомо, розв'язок задачі (1.1.1.), (2.1.1.) можна записати

$$U(t, x) = \frac{1}{2} \left[\varphi_1(x+at) + \varphi_1(x-at) + \int_{-t}^t \varphi_2(x-a\tau) d\tau \right]. \quad (3.1.1.)$$

Тому, що $\varphi_1(x)$ і $\varphi_2(x)$ — м. п. функції, то $\varphi_1(x \pm at)$ і $\varphi_2(x \pm at)$ є м. п. функції t і x .

Хай інтеграл

$$\int_{-t}^t \varphi_2(x-a\tau) d\tau$$

є обмежена функція t і x ($-\infty < t < +\infty$; $-\infty < x < +\infty$). Тоді, на основі властивостей м. п. функцій, із формули (3.1.1.) випливає майже періодичність розв'язку $U(t, x)$ і теорема доведена.

2. Розглянемо рівняння вільних коливань газу

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right) = 0 \quad (1.2.1.)$$

при умові, що

$$\left. \begin{aligned} U(0, x, y, z) &= \varphi(x, y, z) \\ U_t'(0, x, y, z) &= \psi(x, y, z) \end{aligned} \right\} \quad (2.2.1.)$$

Будемо вважати, що $\varphi(x, y, z)$ і $\psi(x, y, z)$ є м. п. функції x, y, z .
Теорема 1.2.1.

Для скінченних значень t розв'язок задачі (1.2.1.), (2.2.1.) є м. п. функція x, y, z .

Доведення.

Розглянемо допоміжну задачу, а саме:

$$\frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial t^2} - a^2 \left(\frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial z^2} \right) = 0 \quad (1'.2.1.)$$

при умові, що

$$\left. \begin{aligned} \tilde{U}(0, x, y, z) &= \varphi(x+u, y+v, z+w) \\ \tilde{U}_t'(0, x, y, z) &= \psi(x+u, y+v, z+w) \end{aligned} \right\}, \quad (2'.2.1.)$$

де u, v, w — «компоненти» спільного ε -зміщення функцій $\varphi(x, y, z)$ і $\psi(x, y, z)$.

Покладемо

$$V(t, x, y, z) = \tilde{U}(t, x, y, z) - U(t, x, y, z). \quad (3.2.1.)$$

Із (1.2.1.), (2.2.1.), (1'.2.1.), (2'.2.1.) знаходимо

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - a^2 \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right) = 0 \quad (4.2.1.)$$

$$\left. \begin{aligned} V(0, x, y, z) &= \tilde{U}(0, x, y, z) - U(0, x, y, z) = \tilde{\varphi}(x, y, z) \\ V_t'(0, x, y, z) &= \tilde{U}_t'(0, x, y, z) - U_t'(0, x, y, z) = \tilde{\psi}(x, y, z) \end{aligned} \right\}. \quad (5.2.1.)$$

Як відомо, розв'язок задачі (4.2.1.), (5.2.1.) запишеться

$$V(t, x, y, z) = \frac{1}{4\pi a^2} \left[\iint_{S_{at}} \frac{\tilde{\psi}(\alpha, \beta, \gamma)}{t} d\sigma + \frac{\partial}{\partial t} \iint_{S_{at}} \frac{\tilde{\varphi}(\alpha, \beta, \gamma)}{t} d\sigma \right], \quad (6.2.1.)$$

де інтегрування ведеться по сфері

$$(\alpha - x)^2 + (\beta - y)^2 + (\gamma - z)^2 = a^2 t^2.$$

Тому, що $\varphi(x, y, z)$ і $\psi(x, y, z)$ є м. п. функції, то, як це видно із (5.2.1.),

$$|\tilde{\varphi}(x, y, z)| < \varepsilon \quad |\tilde{\psi}(x, y, z)| < \varepsilon.$$

На основі останніх нерівностей маємо

$$|V(t, x, y, z)| < \frac{\varepsilon}{4\pi a^2} \left[\iint_{S_{at}} \left| \frac{d\sigma}{t} \right| + \frac{\partial}{\partial t} \iint_{S_{ai}} \left| \frac{d\sigma}{t} \right| \right]. \quad (7.2.I.)$$

Але

$$\iint_{S_{at}} \frac{d\sigma}{t} = 2\pi a^2 t,$$

де D_{at} — проекція S_{at}

Отже,

$$|V(t, x, y, z)| < \frac{\varepsilon}{4\pi a^2} (|2\pi a^2 t| + |2\pi a^2|) = \frac{1}{2} \varepsilon (|t| + 1),$$

що й треба було довести.

З а у в а ж е н н я І. Теорема 1.2.I. вірна і для задачі Коші для рівняння вільних коливань мембрани.

II. Неоднорідний випадок.

I. Розглянемо неоднорідне рівняння струни

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = f(t, x). \quad (1.1.II.)$$

Хай функція $U(t, x)$ задовольняє умовам

$$\left. \begin{aligned} U(0, x) &= \varphi(x) \\ U_t(0, x) &= \psi(x) \end{aligned} \right\}. \quad (2.1.II.)$$

Будемо вважати, що $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ — м. п. функції x , а $f(t, x)$ — м. п. функція t, x .

Т е о р е м а 1. 1. II. Обмежений розв'язок задачі (1. 1. II.), (2.1.II.) є майже періодична функція змінних t, x .

Д о в е д е н н я.

Розв'язок задачі (1.1.II.), (2.1.II.) запишеться

$$\begin{aligned} U(t, x) = & \frac{1}{2} \left[\varphi(x+at) + \varphi(x-at) + \int_{-t}^t \psi(x-a\tau) d\tau \right] + \\ & + \frac{1}{2a} \iint_T f(\tau, \xi) d\tau d\xi. \end{aligned} \quad (3.1.II.)$$

Тут T — трикутник $0 \leq \tau \leq t$, $|\xi - x| \leq a|t - \tau|$. За умовою, розв'язок задачі (1.1.II.), (2.1.II.) є обмежений. Значить, інтеграли

$$\int_{-t}^t \psi(x-a\tau) d\tau \quad \text{і} \quad \iint_T f(\tau, \xi) d\tau d\xi$$

є обмежені функції змінних t і x , а, отже, вони м. п. функції t, x . Функції $\varphi(x+at)$ і $\varphi(x-at)$ є також м. п. функції змінних t, x . Таким чином, $U(t, x)$ є м. п. функція t, x . Теорема доведена.

2. Розглянемо задачу Коші для неоднорідного рівняння

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - a^2 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right) = f(t, x, y, z) \quad (1.2.II.)$$

$$\left. \begin{aligned} U(0, x, y, z) &= \varphi(x, y, z) \\ \dot{U}_t(0, x, y, z) &= \psi(x, y, z) \end{aligned} \right\} \quad (2.2.II.)$$

Хай $\varphi(x, y, z)$, $\psi(x, y, z)$ — м. п. функції x, y, z , а $f(t, x, y, z)$ — м. п. функція змінних t, x, y, z .

Теорема 1.2.II. При скінченному значенні t розв'язок задачі (1.2.II.), (2.2.II.) є м. п. функція змінних x, y, z .

Доведення.

Розглянемо допоміжну задачу

$$\frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial t^2} - a^2 \left(\frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial z^2} \right) = f(t+\tau, x+u, y+v, z+w) \quad (1'.2.II.)$$

$$\left. \begin{aligned} \tilde{U}(0, x, y, z) &= \varphi(x+u, y+v, z+w) \\ \tilde{U}_t(0, x, y, z) &= \psi(x+u, y+v, z+w) \end{aligned} \right\} \quad (2'.2.II.)$$

Тут τ, u, v, w — «компоненти» спільного ε -зміщення функцій $f(t, x, y, z)$, $\varphi(x, y, z)$, $\psi(x, y, z)$.

Покладемо

$$V(t, x, y, z) = \tilde{U}(t, x, y, z) - U(t, x, y, z), \quad (3.2.II.)$$

Тоді із (1.2.II.), (2.2.II.), (1'.2.II.), (2'.2.II.) знаходимо:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - a^2 \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right) = \tilde{f}(t, x, y, z) \quad (4.2.II.)$$

$$\left. \begin{aligned} V(0, x, y, z) &= \tilde{\varphi}(x, y, z) \\ V_t(0, x, y, z) &= \tilde{\psi}(x, y, z) \end{aligned} \right\} \quad (5.2.II.)$$

Тому, що $f(t, x, y, z)$, $\varphi(x, y, z)$, $\psi(x, y, z)$ є м. п. функції із спільним ε -зміщенням, то

$$|\tilde{f}(t, x, y, z)| < \varepsilon; \quad |\tilde{\varphi}(x, y, z)| < \varepsilon; \quad |\tilde{\psi}(x, y, z)| < \varepsilon. \quad (6.2.II.)$$

Розв'язок задачі (4.2.II.), (5.2.II.) запишеться

$$\begin{aligned} V(t, x, y, z) = & \frac{1}{4\pi a^2} \left[\iint_{S_{at}} \frac{\tilde{\psi}(\alpha, \beta, \gamma)}{t} d\sigma + \frac{\partial}{\partial t} \iint_{S_{at}} \frac{\tilde{\varphi}(\alpha, \beta, \gamma)}{t} d\sigma \right] + \\ & + \frac{1}{4\pi a^2} \iiint_{r \leq at} \frac{\tilde{f}(\xi, \eta, \zeta; t - \frac{r}{a})}{r} d\xi d\eta d\zeta, \end{aligned}$$

де $r = \sqrt{(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2 + (\zeta-z)^2}$, S_{at} — сфера $(\alpha-x)^2 + (\beta-y)^2 + (\gamma-z)^2 = a^2 t^2$.

Використовуючи нерівності (6.2.II.), маємо

$$|V(t, x, y, z)| < \frac{\varepsilon}{4\pi a^2} \left[\iint_{S_{at}} \frac{d\sigma}{t} + \frac{\partial}{\partial t} \iint_{S_{at}} \frac{d\sigma}{t} + \iiint_{r \leq at} \frac{d\xi d\eta d\zeta}{r} \right]$$

Але

$$\begin{aligned} \iint_{S_{at}} \frac{d\sigma}{t} &= 2\pi a^2 t, \\ \iiint_{r \leq at} \frac{d\xi d\eta d\zeta}{r} &= 4\pi a^2 t^2. \end{aligned}$$

Отже,

$$|V(t, x, y, z)| < \frac{\varepsilon}{2} (1 + |t| + 2t^2),$$

звідки й випливає доведення теореми.

З а у в а ж е н н я 2. Теорема 1.2.II. вірна і для неоднорідного рівняння мембрани з правою майже періодичною частиною і майже періодичними початковими даними.

ЛІТЕРАТУРА

1. А. Н. Тихонов и А. А. Самарский, Уравнения математической физики, Москва, 1953.
2. Б. М. Левитан, Почти-периодические функции, Москва, 1953.