

ПРО НАБЛИЖЕНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ОДНОГО РІВНЯННЯ КВАЗІГАРМОНІЧНИХ КОЛИВАНЬ

К. И. КРОПИВНИЦЬКА

В роботі наводиться наближений розв'язок рівняння вимушених квазігармонічних коливань, коли частота зміни динамічного коефіцієнта затухання рівна подвоєній частоті збуджуючої сили. При цьому досліджується також випадок резонансу.

§ 1. Загальні зауваження

Вимушені коливання механічної системи одного степеня вільності при змінних пружноінерційних характеристиках системи можна описати таким квазігармонічним рівнянням [1, 2, 3]:

$$\frac{d^2x}{d\theta^2} + 2\gamma(\theta) \frac{dx}{d\theta} + x = S(\theta), \quad (1.1)$$

де $\gamma(\theta)$ — так званий динамічний коефіцієнт затухання [2] (відома періодична функція);

$S(\theta)$ — узагальнена збуджуюча сила для даної системи.

Нехай динамічний коефіцієнт затухання і збуджуюча сила визначаються таким чином:

$$\gamma(\theta) = \varepsilon_0 + \varepsilon_1 \cos n\theta + \varepsilon_2 \sin n\theta, \quad (1.2)$$

де $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, n$ — сталі величини; $\varepsilon_0 > 0$

$$S(\theta) = P \sin(p\theta + \alpha), \quad (1.3)$$

де P, p, α — сталі величини.

При деяких співвідношеннях між частотами збуджуючої сили, динамічного коефіцієнта затухання і власною частотою системи в системі може виникнути явище резонансу. Ці співвідношення між частотами такі [3]:

$$n = \pm 2; p = \pm 1; n \pm p = \pm 1. \quad (1.4)$$

В роботі (3) наведено розв'язок рівняння (1.1) в першому наближенні по $\gamma(\theta)$ (у випадку, коли динамічний коефіцієнт затухання $\gamma(\theta)$ виражається формулою (1.2), збуджуюча сила $S(\theta)$ формулою (1.3), а співвідношення (1.4) не виконуються).

В даній роботі наводиться наближений розв'язок рівняння (1.1) для випадку, коли частота зміни динамічного коефіцієнта затухання

(1.2) рівна подвоєній частоті збудуючої сили, тобто, коли $n = 2p$. При цьому досліджується також випадок $p = 1$, тобто коли виконуються рівності (1.4).

§ 2. Побудова наближеного розв'язку рівняння (1.1)

Наближений квазіперіодичний розв'язок рівняння (1.1) для випадку, коли $n = 2p$, будемо шукати за методом Мандельштама—Папалексі [4]. З рівняння (1.1) легко зауважити, що при $\gamma(\Theta) \rightarrow 0$ система переходить в гармонічну. Якщо $\gamma(\Theta) \neq 0$, але $\max|\gamma(\Theta)|$ є малою величиною, то система близька до гармонічної. Далі будемо розглядати тільки такі системи. В такому випадку розв'язок рівняння (1.1) представимо у вигляді:

$$x(\Theta) = a(\Theta) \sin p\Theta + b(\Theta) \cos p\Theta, \quad (2.1)$$

де $a(\Theta)$ і $b(\Theta)$ — деякі функції змінної Θ , які необхідно визначити.

Оскільки нами введено дві функції $a(\Theta)$ і $b(\Theta)$, то на ці функції можна накласти додаткову умову, яку виберемо у такій формі

$$a(\Theta) \sin p\Theta + b(\Theta) \cos p\Theta = 0, \quad (2.2)$$

де

$$\dot{a}(\Theta) = \frac{da}{d\Theta}; \quad \dot{b}(\Theta) = \frac{db}{d\Theta}.$$

Рівняння (1.1) представимо у вигляді [5]

$$\frac{d^2 x}{d\Theta^2} + p^2 x = (p^2 - 1)x - 2\gamma(\Theta) \frac{dx}{d\Theta} + S(\Theta) = \Sigma F. \quad (2.3)$$

На вираз, що стоїть в правій частині рівняння (2.3), будемо дивитись як на систему сил (зовнішніх і внутрішніх), що діють на консервативну коливну систему частоти p , рівняння якої стоїть в лівій частині. У випадку, коли $n = 2p$, а функції $\gamma(\Theta)$ і $S(\Theta)$ визначаються формулами (1.2) і (1.3),

$$\Sigma F = (p^2 - 1)x - 2(\epsilon_0 + \epsilon_1 \cos 2p\Theta + \epsilon_2 \sin 2p\Theta) \frac{dx}{d\Theta} + P \sin(p\Theta + \alpha). \quad (2.4)$$

Цей вираз з допомогою формул (2.1) і (2.2) можна представити в такому вигляді:

$$\Sigma F = f_1(a, b) \sin p\Theta + f_2(a, b) \cos p\Theta + \dots, \quad (2.5)$$

де

$$\left. \begin{aligned} f_1(a, b) &= P \cos \alpha + a(p^2 - 1 - \epsilon_2 p) + b(2\epsilon_0 - \epsilon_1) p \\ f_2(a, b) &= P \sin \alpha - a(2\epsilon_0 + \epsilon_1) p + b(p^2 - 1 + \epsilon_2 p) \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

Якщо підставити функцію (2.1) в рівняння (2.3) і врахувати умову (2.2), то одержимо:

$$ap \cos p\Theta - bp \sin p\Theta = f_1(a, b) \sin p\Theta + f_2(a, b) \cos p\Theta + \dots \quad (2.7)$$

З рівнянь (2.2) та (2.7) знаходимо:

$$\left. \begin{aligned} \dot{a} &= \frac{1}{2p} f_2(a, b) + \frac{1}{2p} [f_1(a, b) \sin 2p\Theta + f_2(a, b) \cos 2p\Theta + \dots] \\ \dot{b} &= -\frac{1}{2p} f_1(a, b) - \frac{1}{2p} [f_2(a, b) \sin 2p\Theta - f_1(a, b) \cos 2p\Theta + \dots] \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

Співвідношення (2.8) представляють собою точну систему рівнянь для визначення функцій $a(\Theta)$ і $b(\Theta)$. Тепер зауважимо, що при малих значеннях $\gamma(\Theta)$, розв'язок рівняння (1.1) повинен бути близьким до гармонічного, тому слід чекати, що функції $a(\Theta)$ і $b(\Theta)$ будуть мало мінятися протягом одного періода, оскільки при $\gamma(\Theta) = 0$ величини a і b стали.

Тому для наближеного визначення функцій $a(\Theta)$ і $b(\Theta)$ в період установлювання можна (4) знехтувати членами, які мають гармоніки $\sin \nu \Theta$ і $\cos \nu \Theta$ при $\nu = 2, 3, \dots$

Таким чином, для наближеного визначення функцій одержуємо так звані «вкорочені» рівняння:

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{d\Theta} &= \frac{1}{2p} f_2(a, b) = \frac{P}{2p} \sin \alpha - \frac{2\varepsilon_0 + \varepsilon_1}{2} a + \frac{p^2 - 1 + \varepsilon_2 p}{2p} b \\ \frac{db}{d\Theta} &= -\frac{1}{2p} f_1(a, b) = -\frac{P}{2p} \cos \alpha - \frac{p^2 - 1 - \varepsilon_2 p}{2p} a - \frac{2\varepsilon_0 - \varepsilon_1}{2} b \end{aligned} \right\}. \quad (2.9)$$

Розв'яжемо тепер систему рівнянь (2.9). З першого рівняння цієї системи визначаємо $b(\Theta)$:

$$b(\Theta) = \frac{2p}{p^2 - 1 + \varepsilon_2 p} \cdot \frac{da}{d\Theta} + \frac{(2\varepsilon_0 + \varepsilon_1)p}{p^2 - 1 + \varepsilon_2 p} a - \frac{P}{p^2 - 1 + \varepsilon_2 p} \sin \alpha. \quad (2.10)$$

Підставляючи значення функції $b(\Theta)$ з (2.10) в друге рівняння системи (2.9), одержимо:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 a}{d\Theta^2} + 2\varepsilon_0 \frac{da}{d\Theta} + \frac{(p^2 - 1)^2 - \varepsilon_1^2 p^2 - \varepsilon_2^2 p^2 + 4\varepsilon_0^2 p^2}{4p^2} a = \\ = \frac{P(2\varepsilon_0 - \varepsilon_1)}{4p} \sin \alpha - \frac{P(p^2 - 1 + \varepsilon_2 p)}{4p^2} \cos \alpha. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Загальний інтеграл цього рівняння має такий вигляд:

$$a(\Theta) = C_1 \cdot e^{r_1 \Theta} + C_2 \cdot e^{r_2 \Theta} + P \frac{p(2\varepsilon_0 - \varepsilon_1) \sin \alpha - (p^2 - 1 + \varepsilon_2 p) \cos \alpha}{(p^2 - 1)^2 - \varepsilon_1^2 p^2 - \varepsilon_2^2 p^2 + 4\varepsilon_0^2 p^2}, \quad (2.12)$$

де C_1, C_2 — сталі інтегрування; r_1, r_2 — корні характеристичного рівняння, які визначаються в даному випадку за формулою:

$$r_{1,2} = -\varepsilon_0 \pm \frac{\sqrt{\varepsilon_1^2 p^2 + \varepsilon_2^2 p^2 - (p^2 - 1)^2}}{2p}. \quad (2.13)$$

Користуючись формулами (2.10) і (2.12), знайдемо:

$$\begin{aligned} b(\Theta) &= C_1 \frac{p\varepsilon_1 + \sqrt{\varepsilon_1^2 p^2 + \varepsilon_2^2 p^2 - (p^2 - 1)^2}}{p^2 - 1 + \varepsilon_2 p} e^{r_1 \Theta} + \\ &+ C_2 \frac{p\varepsilon_1 - \sqrt{\varepsilon_1^2 p^2 + \varepsilon_2^2 p^2 - (p^2 - 1)^2}}{p^2 - 1 + \varepsilon_2 p} e^{r_2 \Theta} - \\ &- P \frac{(p^2 - 1 - \varepsilon_2 p) \sin \alpha + p(2\varepsilon_0 + \varepsilon_1) \cos \alpha}{(p^2 - 1)^2 - \varepsilon_1^2 p^2 - \varepsilon_2^2 p^2 + 4\varepsilon_0^2 p^2}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

На основі співвідношень (2.12) і (2.14) шуканий розв'язок (2.1) приймає такий вигляд:

$$\begin{aligned}
 x(\Theta) = & [C_1 \cdot e^{r_1 \Theta} + C_2 \cdot e^{r_2 \Theta}] \sin p\Theta + \left[C_1 \frac{p\varepsilon_1 + \sqrt{\varepsilon_1^2 p^2 + \varepsilon_2^2 p^2 - (p^2 - 1)^2}}{p^2 - 1 + \varepsilon_2 p} e^{r_1 \Theta} + \right. \\
 & \left. + C_2 \frac{p\varepsilon_1 - \sqrt{\varepsilon_1^2 p^2 + \varepsilon_2^2 p^2 - (p^2 - 1)^2}}{p^2 - 1 + \varepsilon_2 p} e^{r_2 \Theta} \right] \cos p\Theta + \\
 & + P \frac{(2\varepsilon_0 - \varepsilon_1) \sin \alpha - (p^2 - 1 + \varepsilon_2 p) \cos \alpha}{(p^2 - 1)^2 - \varepsilon_1^2 p^2 - \varepsilon_2^2 p^2 + 4\varepsilon_0^2 p^2} \sin p\Theta - \\
 & - P \frac{(p^2 - 1 - \varepsilon_2 p) \sin \alpha + p(2\varepsilon_0 + \varepsilon_1) \cos \alpha}{(p^2 - 1)^2 - \varepsilon_1^2 p^2 - \varepsilon_2^2 p^2 + 4\varepsilon_0^2 p^2} \cos p\Theta \quad (2.15)
 \end{aligned}$$

§ 3. Аналіз розв'язку (2.15)

Розглянемо тепер параметри ε_0 , ε_1 , ε_2 та частоту p і встановимо, при яких співвідношеннях між цими величинами розв'язок (2.15) залишається обмеженим при $\Theta \rightarrow \infty$. З цією метою скористуємося формулою (2.13) і встановимо умову, коли корні $r_{1,2}$ характеристичного рівняння є комплексні величини. Ця умова полягає в таких нерівностях:

$$\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 < \frac{(p^2 - 1)^2}{p^2}; \quad p \neq 1; \quad |\varepsilon_1| < 1; \quad |\varepsilon_2| < 1. \quad (3.1)$$

Якщо нерівності (3.1) виконуються, то формулу (2.13) можна записати так:

$$r_{1,2} = -\varepsilon_0 \pm ki, \quad (3.2)$$

де

$$k = \frac{\sqrt{(p^2 - 1)^2 - \varepsilon_1^2 p^2 - \varepsilon_2^2 p^2}}{2p}.$$

Таким чином, при умові (3.1) розв'язок (2.15) перетворюється до такого вигляду:

$$\begin{aligned}
 x(\Theta) = & e^{-\varepsilon_0 \Theta} [A \cos(k\Theta + \gamma) \sin p\Theta + B \sin(k\Theta + \delta) \cos p\Theta] + \\
 & + C \sin(p\Theta + \lambda), \quad (3.3)
 \end{aligned}$$

де

$$\left. \begin{aligned}
 A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}; \quad B = A \sqrt{\frac{p^2 - 1 - \varepsilon_2 p}{p^2 - 1 + \varepsilon_2 p}}; \quad \operatorname{tg} \gamma = -\frac{C_1}{C_2}; \\
 \operatorname{tg} \delta = \frac{C_2 p \varepsilon_1 + C_1 \sqrt{(p^2 - 1)^2 - \varepsilon_1^2 p^2 - \varepsilon_2^2 p^2}}{C_1 p \varepsilon_1 - C_2 \sqrt{(p^2 - 1)^2 - \varepsilon_1^2 p^2 - \varepsilon_2^2 p^2}}; \\
 \operatorname{tg} \lambda = -\frac{(p^2 - 1 - \varepsilon_2 p) \sin \alpha + p(2\varepsilon_0 + \varepsilon_1) \cos \alpha}{p(2\varepsilon_0 - \varepsilon_1) \sin \alpha - (p^2 - 1 + \varepsilon_2 p) \cos \alpha} \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned}
 C = & \frac{P \sqrt{[p^2(2\varepsilon_0 - \varepsilon_1)^2 + (p^2 - 1 - \varepsilon_2 p)^2] \sin^2 \alpha + 4p[\varepsilon_1(p^2 - 1) - 2p\varepsilon_0\varepsilon_2]}}{(p^2 - 1)^2 - \varepsilon_1^2 p^2 - \varepsilon_2^2 p^2 + 4\varepsilon_0^2 p^2} \times \\
 & \times \frac{\sin \alpha \cos \alpha + [p^2(2\varepsilon_0 + \varepsilon_1)^2 + (p^2 - 1 + \varepsilon_2 p)^2] \cos^2 \alpha}{(p^2 - 1)^2 - \varepsilon_1^2 p^2 - \varepsilon_2^2 p^2 + 4\varepsilon_0^2 p^2}. \quad (3.5)
 \end{aligned}$$

На основі нерівностей (3.1) і формули (3.3) легко зауважити, що власні коливання системи затухають при $\Theta \rightarrow \infty$. Отже, при достатньо великих значеннях Θ стаціонарні коливання системи мають такий вигляд:

$$x_{\infty}(\Theta) = C \sin(p\Theta + \lambda), \quad (3.6)$$

де C визначається за формулою (3.5). Формула (3.6) справедлива тільки тоді, коли співвідношення між параметрами $\epsilon_0, \epsilon_1, \epsilon_2$ таке, що амплітуда C вимушених коливань є обмеженою величиною. В зв'язку з цим розглянемо знаменник в формулі (3.5) і знайдемо умову, коли цей знаменник може приймати нульові значення, тобто розглянемо рівняння:

$$(p^2 - 1)^2 - \epsilon_1^2 p^2 - \epsilon_2^2 p^2 + 4\epsilon_0^2 p^2 = 0. \quad (3.7)$$

Корні цього рівняння визначаються формулою:

$$p_{1,2,3,4} = \pm \left[\frac{(2 + \epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 - 4\epsilon_0^2) \pm \sqrt{(2 + \epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 - 4\epsilon_0^2)^2 - 4}}{2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.8)$$

Якщо має місце нерівність:

$$\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 < 4\epsilon_0^2, \quad (3.9)$$

то не існує дійсних значень p , при яких виконується рівняння (3.7). Отже, при умові (3.9) амплітуда вимушених коливань завжди обмежена. У випадку, коли параметри $\epsilon_0, \epsilon_1, \epsilon_2$ задовольняють нерівність

$$\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 > 4\epsilon_0^2, \quad (3.10)$$

то рівняння (3.7) може виконуватися. Оскільки в такому разі чисельник в формулі (3.5) не приймає нульових значень, то амплітуда C може приймати необмежені значення.

Отже, приходимо до висновку, що для квазігармонічної системи, параметри якої задовольняють нерівності (3.1) і (3.9), стаціонарні коливання системи описуються формулами (3.6) і (3.5).

§ 4. Випадок резонансу

Розглянемо випадок, коли $p = 1$. В такому разі для нашої системи $n = 2$ і виконуються рівності (1.4), тобто в системі має місце явище резонансу. Характер коливань в цьому випадку визначимо на основі формул (2.13) і (2.15). При цьому зауважимо, що коли $p = 1$ корні характеристичного рівняння $r_{1,2}$, які визначаються формулою (2.13), є дійсні і різні числа, а саме:

$$r_{1,2}^* = -\epsilon_0 \pm \frac{\sqrt{\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2}}{2}. \quad (4.1)$$

Підставивши ці значення $r_{2,2}^*$ в формулу (2.15), одержимо:

$$\begin{aligned} x(\Theta) = & [C_1 \cdot e^{r_1^* \Theta} + C_2 \cdot e^{r_2^* \Theta}] \sin \Theta + \left[C_1 \frac{\epsilon_1 + \sqrt{\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2}}{\epsilon_2} e^{r_1^* \Theta} + \right. \\ & \left. + C_2 \frac{\epsilon_1 - \sqrt{\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2}}{\epsilon_2} e^{r_2^* \Theta} \right] \cos \Theta + C^* \sin(\Theta + \lambda^*), \end{aligned} \quad (4.2)$$

де

$$C^* = \frac{P}{4\varepsilon_0^2 - (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2)} \{ [\varepsilon_2^2 + (2\varepsilon_0 - \varepsilon_1)^2] \sin^2 \alpha - 8\varepsilon_0 \varepsilon_2 \sin \alpha \cos \alpha + [\varepsilon_2^2 + (2\varepsilon_0 + \varepsilon_1)^2] \cos^2 \alpha \}^{\frac{1}{2}}$$

$$\operatorname{tg} \lambda^* = \frac{\varepsilon_2 \sin \alpha - (2\varepsilon_0 + \varepsilon_1) \cos \alpha}{(2\varepsilon_0 - \varepsilon_1) \sin \alpha - \varepsilon_2 \cos \alpha}. \quad (4.3)$$

На основі формул (4.1) і (4.2) легко зробити висновок, що у випадку резонансу власні коливання системи будуть затухати при $\Theta \rightarrow \infty$, якщо має місце така нерівність:

$$\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 < 4\varepsilon_0^2. \quad (4.4)$$

Таким чином коливання системи при $\Theta \rightarrow \infty$ визначаються формулою:

$$x_\infty(\Theta) = C^* \sin(\Theta + \lambda^*). \quad (4.5)$$

При умові (4.4) вимушені коливання (4.5) у резонансному випадку будуть обмеженими.

§ 5. Визначення стаціонарних коливань з врахуванням вищих гармонік

Наведений в § 2 розв'язок рівняння (1.1) побудований у вигляді (2.1), тобто з врахуванням тільки основних гармонік. При цьому визначено характер квазіперіодичних коливань в період їх установлювання, а також визначено для такого випадку стаціонарні коливання, які настають в системі, коли $\Theta \rightarrow \infty$.

Характер стаціонарних коливань системи з врахуванням вищих гармонік для рівняння (1.1) легко відшукати так. Представимо розв'язок рівняння (1.1) для випадку, коли $n = 2p$ у такому вигляді:

$$x(\Theta) = a_1 \sin p\Theta + b_1 \cos p\Theta + a_2 \sin 2p\Theta + b_2 \cos 2p\Theta + a_3 \sin 3p\Theta + b_3 \cos 3p\Theta, \quad (5.1)$$

де $a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3$ — сталі, які необхідно визначити. Підставивши цю функцію в рівняння (1.1) і зрівнявши коефіцієнти при однакових гармоніках, включаючи $\sin 3p\Theta$ і $\cos 3p\Theta$, знайдемо сталі $a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3$.

Якщо $\varepsilon_0, \varepsilon_1$ і ε_2 малі величини, то з точністю до квадратів цих величин розв'язок (5.1) можна записати в такому вигляді:

$$x(\Theta) = \frac{P}{(p^2 - 1)^2} [p(2\varepsilon_0 - \varepsilon_1) \sin \alpha - (p^2 - 1 + \varepsilon_2 p) \cos \alpha] \sin p\Theta -$$

$$- \frac{P}{(p^2 - 1)^2} [(p^2 - 1 - \varepsilon_2 p) \sin \alpha + p(2\varepsilon_0 + \varepsilon_1) \cos \alpha] \cos p\Theta +$$

$$+ \frac{Pp}{(p^2 - 1)(9p^2 - 1)} [\varepsilon_1 \sin \alpha - \varepsilon_2 \cos \alpha] \sin 3p\Theta -$$

$$- \frac{Pp}{(p^2 - 1)(9p^2 - 1)} [\varepsilon_2 \sin \alpha + \varepsilon_1 \cos \alpha] \cos 3p\Theta \quad (5.2)$$

Розв'язок (5.2) рівняння (1.1) збігається з розв'язком цього рівняння, одержаним в роботі [3] іншим шляхом.

ЛІТЕРАТУРА

1. М. Я. Леонов, Научные записки, ИМА АН УССР, 2, 1, 5 (1953).
 2. М. Я. Леонов, ДАН УССР, 3, 51 (1948).
 3. К. И. Кропивницька, ДАН УССР, 7, 724 (1959).
 4. Л. И. Мандельштам, Об обосновании одного метода приближенного решения дифференциальных уравнений (Полное собрание трудов, II, изд. АН СССР, 1947).
 5. К. Ф. Теодорчик, Автоколебательные системы, ГТТИ, 1952.
-