Український поліграфічний інститут ім. Івана Федорова
Том XIII Наукові записки 1961

ГРАНИЧНІ ЗАДАЧІ ДЛЯ ЕЛІПТИЧНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ, ЩО ВИРОДЖУЮТЬСЯ НА ГРАНИЦІ ОБЛАСТІ

Л. С. ПАРАСЮК

В цій роботі дається явний розв'язок основних граничних задач в півпросторі $x_n > 0$ $(n \geqslant 3)$ для еліптичних рівнянь, що вироджуються на границі області $x_n = 0$.

Еліптичні диференціальні рівняння, що вироджуються на границі області, зустрічаються при розв'язуванні багатьох важливих задач прикладного характеру. Особливо велику роль відіграють такі рівняння в газовій динаміці, на що вперше вказав Чаплигін. До еліптичних рівнянь, що вироджуються на границі області більш високого порядку і до систем, приводять також деякі задачі теорії пластин змінної товщини і інші.

1. Розв'язування першої граничної задачі.

Нехай область D означає півпростір $x_n \geqslant 0$, так що границею Γ буде площина $x_n = 0$. Рівняння

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial^2 U}{\partial x_i^2} + x_n^m \frac{\partial^2 U}{\partial x_n^2} = 0 \tag{1.1}$$

буде еліптичного типу всюди в області, де $x_n > 0$ і вироджується (стає параболічного типу) на границі області $x_n = 0$. Для такого рівняння ставиться така гранична задача: знайти функцію $U(x)$, яка задовільняла б в півпросторі $x_n > 0$ рівнянню (1.1) і такій граничній умові

$$\lim_{x_n \to 0} U(x) = f(x') \tag{1.2}$$

Далі будуть використовуватись такі позначення:
$x = (x_1, \ldots x_n)$ — точка в n — мірному дійсному просторі і $x' = (x_1, \ldots x_{n-1})$.

Розв'язок задачі (1.1) (1.2) шукається формально у вигляді трансформації Фур'є.

$$U(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n-1}} \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} \widetilde{U}(\alpha_1, \ldots \alpha_{n-1}, x_n)\, e^{i(x' \cdot \alpha')}\, d\alpha_1, \ldots d\alpha_{n-1} \tag{1.3}$$

де $(x' \cdot \alpha')$ — означає скалярний добуток

$$x_1 \cdot \alpha_1 + x_2 \cdot \alpha_2 + \ldots + x_{n-1} \cdot \alpha_{n-1}.$$

Співвідношення (1.1) (1.2) (1.3) приводять відомим способом до такої допоміжної задачі

$$x_n^m \frac{d^2\tilde{U}}{dx_n^2} - \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i^2 \tilde{U} = 0 \tag{1.4}$$

$$\lim_{x_n \to 0} \tilde{U}(\alpha', x_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} f(y_1, \dots y_{n-1}) e^{-i(y', \alpha')} d\alpha_1, \dots d\alpha_{n-1}. \tag{1.5}$$

Загальний розв'язок рівняння (1,4) можна представити в такому вигляді

$$\tilde{U}(\alpha', x_n) = \sqrt{x_n}(C_1 I_p(z) + C_2 K_p(z)). \tag{1.6}$$

Тут $I_p(z)$ і $K_p(z)$ видозмінені (модифіковані) циліндричні функції, які представляють собою дійсні додатні функції змінного

$$z = \frac{2\sqrt{\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i^2}}{2-m} x_n^{\frac{2-m}{2}} \tag{1.7}$$

перша із яких необмежено зростає, друга — спадає при зростанні z; $p = \frac{1}{2-m}$; C_1 і C_2 — довільні сталі.

Тому що розв'язок шукається обмежений на нескінченості, то необхідно, щоб $C_1 = 0$. Із (1.6) одержимо

$$\tilde{U}(\alpha', x_n) = C_2 \sqrt{x_n} K_p(z). \tag{1.8}$$

Для визначення сталої C_2 використовується асимптотика функції $K_p(z)$.

Як відомо, при додатних p має місце співвідношення

$$\underset{z \to 0;\, p>0}{K_p(z)} \approx \frac{2^{p-1}\Gamma(p)}{z^p}. \tag{1.9}$$

Зауважимо, що $p > 0$, якщо тільки $m < 2$. Це і накладає відповідні обмеження на показник m.

Із граничних умов (1,5) на основі (1,8), (1,9) визначають сталу C_2 маємо

$$C_2 = \frac{2\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i^2}\right)^p}{\Gamma(p)(2-m)^p} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} f(y_1, \dots y_{n-1}) e^{-i(y', \alpha')} dy_1 \dots dy_{n-1}. \tag{1.10}$$

Підставивши значення C_2 в (1,8), а (1.8) в (1.3) і змінивши порядок інтегрування, що можливо в нашому випадку, одержимо розв'язок задачі (1,1) (1,2) у вигляді

$$U(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(x' - y', x_n) f(y_1, \dots y_{n-1}) dy_1 \dots dy_{n-1} \tag{1.11}$$

де

$$\Phi(x'-y', x_n) =$$

$$= \frac{2\sqrt{x_n}}{(2\pi)^{n-1}\Gamma(p)(2-m)^p}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\dots\int\limits_{-\infty}^{+\infty} K_p(z)e^{i(r'\cdot\alpha')}\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n-1}\alpha_i^2}\right)^p d\alpha_1\dots d\alpha_{n-1} \tag{1.12}$$

так званий фундаментальний розв'язок задачі Діріхле для півпростору $x_n > 0$, аналогічно потенціалу подвійного шару для рівняння Лапласа.

Тут $\eta' = x' - y'$ і $(\eta'\cdot\alpha') = \sum\limits_{i=1}^{n-1}(x_i - y_i)\alpha_i$.

Вираз для функції $\Phi(x'-y', x_n)$, можна значно спростити.

Нехай $r = \sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2+\dots+\alpha_{n-1}^2}$ покладемо $\rho^2 = \eta_1^2+\eta_2^2+\dots+\eta_{n-2}^2$ і зробивши заміну змінних

$$\eta_i = \rho\beta_i \qquad (i = 1, 2, \dots n-1)$$

$$t_1 = \sum_{i=1}^{n-1}\beta_i\alpha_i; \quad t_j = \sum_{i=1}^{n-1}\beta_{ij}\alpha_i \qquad (j = 2, 3\dots n-1)$$

де β_{ij} вибрані таким способом, щоб перетворення було ортогональним, знайдемо що

$$r = \sqrt{t_1^2 - t_2^2 + \dots + t_{n-1}^2}$$
$$d\alpha_1\dots d\alpha_{n-1} = dt_1\dots dt_{n-1} \tag{1.13}$$

Нехай далі $\lambda^2 = t_2^2 + \dots + t_{n-1}^2$.

Тоді формула (1,12) прийме вигляд

$$\Phi(x'-y', x_n) =$$

$$= \frac{4\pi^{\frac{n-2}{2}}\sqrt{x_n}}{(2\pi)^{n-1}\Gamma(p)\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)(2-m)^p}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}dt_1\int\limits_0^{+\infty}K_p\left(\frac{2\sqrt{t_1^2+\lambda^2}}{2-m}x_n^{\frac{2-m}{2}}\right)r^p e^{it_1\rho}\lambda^{n-3}\,d\lambda.$$

Для обчислення інтегралу (1.13) зробимо заміну змінних

$$\lambda = r\sin\varphi; \qquad t_1 = r\cos\varphi.$$

Тоді одержимо

$$\Phi(x'-y', x_n) = \frac{\sqrt{x_n}}{2^{n-3}\pi^{\frac{n-1}{2}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(p)\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)(2-m)^p}\int\limits_0^{+\infty}K_p\left(\frac{2x_n^{\frac{2-m}{2}}}{2-m}r\right)\times$$

$$\times r^{p+n-2}\int\limits_0^{\pi}\sin^{n-3}\varphi e^{ir\rho\cos\varphi}d\varphi \tag{1.14}$$

Як відомо

$$\int\limits_0^{\pi}\sin^{n-3}\varphi e^{ir\rho\cos\varphi}d\varphi = \frac{2^q\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)}{(\rho r)^q}I_q(\rho, r) \tag{1.15}$$

де $q = \dfrac{n-3}{2}$.

Підставивши (1.15) в (1.14), одержимо

$$\Phi(x'-y',x_n)=\frac{\sqrt{x_n}}{2^q\pi^{\frac{n-1}{2}}\Gamma(p)(2-m)^p\rho^q}\int\limits_0^\infty K_p\left(\frac{2x_n^{\frac{2-m}{2}}}{2-m}r\right)I_q(\rho,r)\,r^{p+q+1}dr. \tag{1.16}$$

Далі інтегруючи, знайдемо

$$\Phi(x'-y',x_n)=\frac{4^p(2-m)^{n-1}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}+p\right)x_n}{\Gamma(p)\pi^{\frac{n-1}{2}}\left((2-m)^2\sum\limits_{i=1}^{n-1}(x_i-y_i)^2+4x_n^{2-m}\right)^{\frac{n-1}{2}+p}}. \tag{1.17}$$

Таким чином, розв'язок задачі (1,1) (1,2) можна записати у вигляді

$$U(x)=C\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x_nf(y_1,\ldots y_{n-1})\,dy_1\ldots dy_{n-1}}{\left((2-m)^2\sum\limits_{i=1}^{n-1}(x_i-y_i)^2+4x_n^{2-m}\right)^{\frac{n-1}{2}+p}} \tag{1.18}$$

де

$$C=\frac{4^p(2-m)^{n-1}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}+p\right)}{\Gamma(p)\pi^{\frac{n-1}{2}}}. \tag{1.19}$$

Обгрунтування методу

Покажемо тепер, що знайдений формально розв'язок (1.18) дійсно дає розв'язок, при деяких обмеженнях граничних умов, поставленої задачі (1,1) (1,2). Для того розглянемо спочатку деякі інтегральні властивості фундаментального розв'язку $\Phi(x'-y',x_n)$.

Нехай Δ — означає область всього півпростору за винятком достатної малої $(n-1)$ — мірної кулі, що містить окіл точки x'. Тоді

$$\lim_{x_n\to 0}\int\cdots\int\limits_\Delta \Phi(x'-y',x_n)\,dy_1,\ldots dy_{n-1}=0. \tag{1.20}$$

Ця властивість випливає із явного представлення функції $\Phi(x'-y',x_n)$, якщо тільки $\sum\limits_{i=1}^{n-1}(x_i-y_i)^2\neq 0$.

Позначимо через V_ρ $(n-1)$-мірну кулю радіуса ρ з центром в точці x', тоді

$$\lim_{x_n\to 0}\int\cdots\int\limits_{V_\rho}\Phi(x'-y',x_n)\,dy_1\ldots dy_{n-1}=1. \tag{1.21}$$

Дійсно, зробивши узагальнене полярне перетворення, одержимо

$$\lim_{x_n\to 0}\int\cdots\int\limits_{V_\rho}\Phi(x'-y',x_n)\,dy_1,\ldots dy_{n-1}=$$

$$=\lim_{x_n\to 0}\frac{2\cdot 4^p(2-m)^{n-1}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}+p\right)}{\Gamma(p)\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\int\limits_0^\rho\frac{x_nr^{n-2}dr}{(4x_n^{2-m}+(2-m)^2r^2)^{\frac{n-1}{2}+p}}.$$

Для обчислення інтеграла

$$\int\limits_0^{\rho} \frac{x_n r^{n-2} dr}{(4x_n^{2-m}+(2-m)^2 r^2)^{\frac{n-1}{2}+p}}$$

покладемо

$$r=\frac{2x_n^{\frac{2-m}{2}}}{2-m}t.$$

Тоді

$$\lim_{x_n\to 0}\int\ldots\int_{V_\rho}\Phi(x'-y',x_n)\,dy_1,\ldots dy_{n-1}=\frac{2\Gamma\left(\frac{n-1}{2}+p\right)}{\Gamma(p)\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\int\limits_0^{\infty}\frac{t^{n-2}dt}{(1+t^2)^{\frac{n-1}{2}+p}}.$$

Як легко перевірити,

$$\int\limits_0^{\infty}\frac{t^{n-2}dt}{(1+t^2)^{\frac{n-1}{2}+p}}=\frac{1}{2}B\left(p,\frac{n-1}{2}\right),$$

де $B\left(p,\frac{n-1}{2}\right)$ — функція Ейлера 1-го роду. Отже

$$\lim_{x_n\to 0}\int\ldots\int_{V_\rho}\Phi(x'-y',x_n)\,dy_1,\ldots dy_{n-1}=\frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}+p\right)}{\Gamma(p)\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\cdot B\left(p,\frac{n-1}{2}\right).$$

Але тому, що $B(a,b)=\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$, то

$$\lim_{x_n\to 0}\int\ldots\int_{V_\rho}\Phi(x'-y',x_n)\,dy_1,\ldots dy_{n-1}=1.$$

Теорема. Нехай функція $f(x')$ визначена і неперервна для всіх дійсних $x'=(x_1,x_2,\ldots x_{n-1})$ і має оцінку на нескінченності, що не перевищує $\frac{C_1}{|x'|^{\alpha}}$, де $\alpha<2p$ і C_1 — стала.

Тоді для всіх дійсних $m<2$ в півпросторі $x_n>0$ задача (1,1) (1,2), має розв'язок, який представляється формулою (1,18).

Доведення.

Інтеграл (1,18), на основі обмежень відносно функції $f(x')$, буде збіжний всюди в області $x_n>0$ і допускає диференціювання під знаком інтегралу. Простою перевіркою легко показати, що $\Phi(x-y',x_n)$ задовільняє рівнянню (1,1). Отже, (1.18) є розв'язок. Покажемо, що (1,18) задовольняє граничній умові (1.2). Задамо довільне число $\varepsilon>0$ й позначимо через V_ρ $(n-1)$-мірну кулю з центром в точці $x'=(x_1,\ldots x_{n-1})$. Виберемо ρ настільки малим, щоб при $|x'-y'|\leqslant\rho$ коливання функції $f(x')$ не перевищувало ε. Через Δ позначимо область у площині $y_1,\ldots y_{n-1}$, яка залишиться.

Ядро задачі (2,1) (2,2) яке, аналогічне задачі Неймана для рівняння Лапласа, будемо називати основним розв'язком рівняння (2.1) Тут

$$\eta' = x' - y' \text{ і } (\eta' \cdot \alpha') = \sum_{i=1}^{n-1} (x_i - y_i)\,\alpha_i.$$

Вираз для функції $N(x' - y', x_n)$ можна значно спростити. Зробивши заміну змінних, аналогічну п. 1, і провівши деякі обчислення, одержимо

$$N(x' - y', x_n) = \frac{-\sqrt{x_n}}{2^q \pi^{\frac{n-1}{2}} \Gamma(1-p)(2-m)^{1-p} \rho^q} \int_0^\infty \frac{K_p\left(\frac{2x_n^{\frac{2-m}{2}}}{2-m} r\right) I_q(\rho, r)}{r^s}\, dr \tag{2.14}$$

де

$$q = \frac{m-3}{2}; \quad p = \frac{1}{2-m} \text{ і } s = p + \frac{1-n}{2}.$$

Вираз (2.14) є видозмінений інтеграл Вебера—Шафхейтліна, який буде збіжний, якщо тільки

$$q + 1 - s > p. \tag{2.15}$$

В нашому випадку (2.15) прийме вигляд $n - 1 > 2p$, яке завжди виновляється, якщо $n \geqslant 3$ і $m < 1$.

Інтегруючи (2,14), одержимо

$$N(x' - y', x_n) = \frac{-4^{\frac{n-1}{2}} (2-m)^{n-2} \Gamma\left(\frac{n-1}{2} - p\right)}{2^{n-1} \pi^{\frac{n-1}{2}} \Gamma(1-p) \left((2-m)^2 \sum_{i=1}^{n-1} (x_i - y_i)^2 - 4x_n^{2-m}\right)^{\frac{n-1}{2} - p}}. \tag{2,16}$$

Таким чином, розв'язок задачі (2,1) (2,2) прийме вигляд

$$U(x) = C \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(y_1, \ldots y_{n-1})\, dy_1, \ldots dy_{n-1}}{\left((2-m)^2 \sum_{i=1}^{n-1} (x_i - y_i)^2 + 4x_n^{2-m}\right)^{\frac{n-1}{2} - p}} \tag{2,17}$$

де

$$C = \frac{-4^{\frac{n-1}{2} - p} (2-m)^{n-2} \Gamma\left(\frac{n-1}{2} - p\right)}{2^{n-1} \pi^{\frac{n-1}{2}} \Gamma(1-p)}. \tag{2,18}$$

Покажемо тепер, що одержаний формально розв'язок (2,17) дає розв'язок задачі (2,1) (2,2).

Розглянемо для цього деякі інтегральні властивості основного розв'язку $N(x' - y', x_n)$.

Нехай Δ, аналогічно як в п. 1, означає область всього півпростору $x_n \geqslant 0$ за винятком достатньо малої $(n-1)$-мірної кулі радіуса ϱ, що містить окіл точки x', тоді

$$\lim_{x_n \to 0} \int \cdots \int_{\Delta} \frac{\partial}{\partial x_n} N(x' - y', x_n)\, dy_1, \ldots dy_{n-1} = 0. \tag{2,19}$$

Дійсно, маємо

$$\frac{\partial}{\partial x_n} N(x'-y', x_n) = \frac{C_1 x_n^{1-m}}{\left((2-m)^2 \sum_{i=1}^{n-1} (x_i - y_i)^2 + 4x_n^{2-m}\right)^{\frac{n-1}{2}-p+1}} \qquad (2,20)$$

де

$$C_1 = \frac{4^{\frac{n-1}{2}-p+1} (2-m)^{n-1} \Gamma\left(\frac{n-1}{2} - p + 1\right)}{2^{n-1} \pi^{\frac{n-1}{2}} \Gamma(1-p)}. \qquad (2,21)$$

Таким чином, якщо $m < 1$ і $\sum_{i=1}^{n-1} (x_i - y_i)^2 \neq 0$, то властивість (2,19) одержується безпосередньо із (2,20).

Позначимо через V_ρ $(n-1)$-мірну кулю радіуса ϱ з центром в точці x', тоді

$$\lim_{x_n \to 0} \int \cdots \int_{V_\rho} \frac{\partial}{\partial x_n} N(x'-y', x_n)\, dy_1, \ldots dy_{n-1} = 1. \qquad (2.22)$$

Доведення властивості (2,22) приводиться таким же способом як і властивість (1,21).

Т е о р е м а. Нехай функція $f(x')$ визначена і неперервна для всіх дійсних x' і має оцінку на нескінченності, що не перевищує $\frac{C_1}{|x'|^\alpha}$, де $\alpha > 2p \left(p = \frac{1}{2-m}\right)$, C_1 — стала. Тоді для всіх дійсних $m < 1$ в півпросторі $x_n > 0$ задача (2,1) (2,2) має розв'язок, який представляється формулою (2,17).

Доведення цієї теореми проводиться таким же способом як і в п. 1.

Зауважимо, що при $m = 0$ вираз (2,71) перетворюється у відому формулу, що дає розв'язок задачі Неймана в півпросторі $x_n > 0$ для рівняння Лапласа.

3. Перша гранична задача для спряженого рівняння.

Як відомо, спряжене рівняння до (1,1) можна представити у вигляді

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial^2 U}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} (x_n^m U) = 0 \qquad (3,1)$$

Рівняння (3,1), так як і рівняння (1,1), буде еліптичного типу всюди де $x_n > 0$ і вироджується (стає параболічного типу) на границі області $x_n = 0$.

Для рівняння (3,1) ставиться така гранична задача: знайти функцію $U(x)$, яка задовольняла б в півпросторі $x_n > 0$ рівнянню (3,1) і такій граничній умові

$$\lim_{x_n \to 0} x_n^m U(x) = f(x') \qquad (3,2)$$

Аналогічно задачі (1,1) (1,2) розв'язок шукається у вигляді трансформації Фур'є, що приводить до такої допоміжної задачі

$$\frac{d^2(x_n^m\tilde{U})}{dx_n^2}-\sum_{i=1}^{n-1}\alpha_i^2\tilde{U}=0 \tag{3,3}$$

$$\lim_{x_n\to 0}x_n^m\tilde{U}(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}f(y_1,\dots y_{n-1})\,e^{-i(y',\alpha')}d\alpha_1,\dots d\alpha_{n-1}. \tag{3,4}$$

Рівняння (3,3) підстановкою $t=\tilde{U}x_n^m$ приводиться до виду (1,4). Таким чином, необхідний розв'язок рівняння (3,3) можна представити у вигляді

$$\tilde{U}(\alpha',x_n)=C_2\frac{\sqrt{x_n}K_p(z)}{x_n^m}. \tag{3,5}$$

Звідси відразу видно причину спеціальної граничної умови (3,2).

Провівши обчислення, аналогічні п. 1, одержимо розв'язок задачі (3,1) (3,2) у вигляді

$$U(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi^*(x'-y',x_n)\,f(y_1,\dots y_{n-1})\,dy_1,\dots dy_{n-1} \tag{3,6}$$

де

$$\Phi^*(x'-y',x_n)=\frac{4^p(2-m)^{n-1}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}+p\right)x_n^{1-m}}{\Gamma(p)\,\pi^{\frac{n-1}{2}}\left((2-m)^2\sum_{i=1}^{n-1}(x_i-y_i)^2+4x_n^{2-m}\right)^{\frac{n-1}{2}+p}}. \tag{3,7}$$

Зауважимо, що $x_n^m\Phi^*(x'-y',x_n)=\Phi(x'-y',x_n)$; має місце теорема, формуліровка і доведення якої, аналогічно теоремі п. 1.

4. Друга гранична задача для спряженого рівняння.

Другу граничну задачу для рівняння (3.1) розв'язують в явному вигляді для півпростору $x_n>0$ з такою граничною умовою

$$\lim_{x_n\to 0}\frac{\partial}{\partial x_n}(x_n^mU(x))=f(x'). \tag{4,1}$$

Провівши обчислення аналогічні п. 2 і п. 3, одержимо розв'язок задачі (3,1) (4,1) у вигляді

$$U(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}N^*(x'-y',x_n)\,f(y_1,\dots y_{n-1})\,dy_1,\dots dy_{n-1} \tag{4,2}$$

де

$$N^*(x'-y',x_n)=\frac{-4^{\frac{n-1}{2}-p}(2-m)^{n-2}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}-p\right)x_n^{-m}}{2^{n-1}\Gamma(1-p)\,\pi^{\frac{n-1}{2}}\left((2-m)^2\sum_{i=1}^{n-1}(x_i-y_i)^2+4x_n^{2-m}\right)^{\frac{n-1}{2}-p}}. \tag{4,3}$$

Як легко бачити, $x_n^mN^x(x'-y',x_n)=N(x'-y',x_n)$. Має місце теорема аналогічна теоремі п. 2, формулювання і доведення якої повторюється в п. 2.

Зауважимо, що в явному вигляді для півпростору $x_n > 0$ розв'язується також перша і друга гранична задачі для рівняння

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial^2 U}{\partial x_i^2} + x_n^m \frac{\partial^2 U}{\partial x_n^2} + 2k x_n^{m-1} \frac{\partial U}{\partial x_n} + k(k-1) x_n^{m-2} U = 0 \quad (4,4)$$

(де $-\infty < k < \infty$ довільне дійсне число) з такими граничними умовами:

для першої граничної задачі

$$\lim_{x_n \to 0} x_n^k U(x) = f(x') \quad (4,5)$$

і для другої

$$\lim_{x_n \to 0} \frac{\partial}{\partial x_n} (x_n^k U(x)) = f(x'). \quad (4,6)$$

Причому, розв'язок першої граничної задачі дається формулою (3,6) (3,7) з заміною в формулі (3,7) x_n^{1-m} на x_n^{1-k}.

Розв'язок другої граничної задачі дається формулою (4,2) (4,3) з заміною x_n^{-m} на x_n^{-k} в формулі (4,3).

Зауважимо також, що в явному вигляді для півпростору $x_n > 0$ розв'язується перша і друга граничні задачі для спряженого рівняння (4,4), тобто для рівняння

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial^2 U}{d x_i^2} + x_n^m \frac{\partial^2 U}{\partial x_u^2} + 2(m-k) x_n^{m-1} \frac{\partial U}{\partial x_n} + (m-k)(m-k-1) x_n^{m-2} U = 0. \quad (4,7)$$

З такими граничними умовами:

Для першої граничної задачі

$$\lim_{x_n \to 0} x_n^{m-k} U(x) = f(x') \quad (4,8)$$

і для другої

$$\lim_{x_n \to 0} \frac{\partial}{\partial x_n} (x_n^{m-k} U(x)) = f(x'). \quad (4,9)$$

Розв'язок граничної задачі (4,7) (4,8) дається формулою (3,6) (3,7) з заміною в формулі (3,7) x_n^{1-m} на x_u^{1-m+k}, а розв'язок задачі (4,7) (4,9) дається формулою (4,2) (4,3) з заміною в формулі (4,3) x_n^{-m} на x_u^{-m+k}.

Мають місце теореми, аналогічні теоремам п. 1 і п. 2.

ЛІТЕРАТУРА

1. М. И. Вишик, Успехи матем. наук, Т. IX, вип. 1 (54) 1954.
2. Я. Б. Лопатинский, Укр. матем. журнал, № 2, 1953.
3. Ф. Трикоми, Лекции по уравнениям в частных производных, ГИИЛ, 1957.
4. Г. Н. Ватсон, Теория Бесселевых функций, ч. I, ГИИЛ, 1949.
5. И. С. Снеддон, Преобразование Фурье, ГИИЛ, 1955.
6. Л. С. Парасюк, Доповіді АН УРСР, № 2, 1960.