

ЗАГАЛЬНИЙ РОЗВ'ЯЗОК РІВНЯНЬ РІВНОВАГИ
ПОЛОГИХ ОБОЛОНОК, ПРЯМОКУТНИХ В ПЛАНІ

М. П. ШЕРЕМЕТЬЄВ, Т. Л. МАРТИНОВИЧ, О. М. КУЛИК

Визначення напружень і деформацій в пологих оболонках при розгляді малих прогинів зводиться до розв'язування системи

$$D \cdot \Delta \Delta w = k_x \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + k_y \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + q \quad (1)$$

$$\frac{1}{Eh} \cdot \Delta \Delta \Phi = -k_x \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - k_y \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (2)$$

при відповідних граничних умовах. Тут $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$; h — товщина оболонки; k_x, k_y — початкові кривизни координатних ліній x і y , які співпадають з лініями кривизни серединної поверхні. Φ — функція напружень:

$$N_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}; \quad N_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}; \quad S_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y};$$

D — циліндрична жорсткість. E — модуль пружності.

Вважаючи кривизни k_x і k_y постійними, систему (1) і (2) можна звести до одного рівняння восьмого порядку відносно функції w :

$$\Delta \Delta \Delta \Delta w + n^2 \left(k_x^2 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + 2k_x k_y \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + k_y^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \right) = \frac{\Delta \Delta q}{D} \quad (3)$$

або до одного рівняння відносно функції Φ :

$$\begin{aligned} \Delta \Delta \Delta \Delta \Phi + n^2 \left(k_x^2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} + 2k_x k_y \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + k_y^2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} \right) = \\ = -n^2 \left(k_x \frac{\partial^2 q}{\partial y^2} + k_y \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} \right). \end{aligned} \quad (4)$$

Тут

$$n^2 = \frac{Eh}{D} = \frac{12(1-\nu^2)}{h^2}.$$

Не обмежуючи загальності методу розв'язування, можна вважати, що зусилля і моменти, які діють по краях оболонки, а також зовнішнє навантаження симетрично розподілені відносно координатних осей. Для

спрощення вважаємо навантаження q залежним тільки від x . Представляючи навантаження q у вигляді ряду

$$q(x) = \sum_{k=1,3,5,\dots} q_k \cos \mu_k x,$$

розв'язок рівняння (3) шукаємо у вигляді

$$w(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k(x) \cos \mu_k^* y + \sum_{k=1}^{\infty} Y_k(y) \cos \mu_k x + w_0(x), \quad (5)$$

а розв'язок рівняння (4) — у вигляді:

$$\Phi(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k^1(x) \cos \mu_k^* y + \sum_{k=1}^{\infty} Y_k^1(y) \cos \mu_k x + \Phi_0(x). \quad (6)$$

Тут $\mu_k^* = \frac{k\pi}{b}$, $\mu_k = \frac{k\pi}{a}$; a, b — розміри оболонки. Далі прийнято $k_x > k_y$. Підставляємо (5) в (3), визначаємо $w_0(x)$ як частинний розв'язок рівняння

$$\frac{d^8 w_0}{dx^8} + n^2 k_y^2 \frac{d^4 w_0}{dx^4} = \frac{\Delta \Delta q}{D},$$

і із тотожного виконання (3), знаходимо рівняння для $X_k(x)$, $Y_k(y)$. Розв'язавши одержані рівняння, маємо

$$\begin{aligned} X_k(x) = & A_k^* \operatorname{ch} \alpha_k^* x \cos \beta_k^* x + F_k^* \operatorname{sh} \alpha_k^* x \cos \beta_k^* x + G_k^* \operatorname{ch} \alpha_k^* x \sin \beta_k^* x + \\ & + B_k^* \operatorname{sh} \alpha_k^* x \sin \beta_k^* x + C_k^* \operatorname{ch} \gamma_k^* x \cos \delta_k^* x + \mathcal{E}_k^* \operatorname{sh} \gamma_k^* x \cos \delta_k^* x + \\ & + M_k^* \operatorname{ch} \gamma_k^* x \sin \delta_k^* x + D_k^* \operatorname{sh} \gamma_k^* x \sin \delta_k^* x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y_k(y) = & A_k \operatorname{ch} \alpha_k y \cos \beta_k y + F_k \operatorname{sh} \alpha_k y \cos \beta_k y + G_k \operatorname{ch} \alpha_k y \sin \beta_k y + \\ & + B_k \operatorname{sh} \alpha_k y \sin \beta_k y + C_k \operatorname{ch} \gamma_k y \cos \delta_k y + \mathcal{E}_k \operatorname{sh} \gamma_k y \cos \delta_k y + \\ & + M_k \operatorname{ch} \gamma_k y \sin \delta_k y + D_k \operatorname{sh} \gamma_k y \sin \delta_k y. \end{aligned}$$

Підставляючи (6) в (4), визначаємо $\Phi_0(x)$ як частинний розв'язок рівняння

$$\frac{d^8 \Phi_0}{dx^8} + n^2 k_y^2 \frac{d^4 \Phi_0}{dx^4} = -n^2 k_y \frac{d^2 q}{dx^2},$$

і із тотожного виконання (4) знаходимо рівняння для $X_k^1(x)$, $Y_k^1(y)$. Розв'язавши одержані рівняння, маємо:

$$\begin{aligned} X_k^1(x) = & A_k^{1*} \operatorname{ch} \alpha_k^* x \cos \beta_k^* x + F_k^{1*} \operatorname{sh} \alpha_k^* x \cos \beta_k^* x + G_k^{1*} \operatorname{ch} \alpha_k^* x \sin \beta_k^* x + \\ & + B_k^{1*} \operatorname{sh} \alpha_k^* x \sin \beta_k^* x + C_k^{1*} \operatorname{ch} \gamma_k^* x \cos \delta_k^* x + \mathcal{E}_k^{1*} \operatorname{sh} \gamma_k^* x \cos \delta_k^* x + \\ & + M_k^{1*} \operatorname{ch} \gamma_k^* x \sin \delta_k^* x + D_k^{1*} \operatorname{sh} \gamma_k^* x \sin \delta_k^* x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y_k^1(y) = & A_k^1 \operatorname{ch} \alpha_k y \cos \beta_k y + F_k^1 \operatorname{sh} \alpha_k y \cos \beta_k y + G_k^1 \operatorname{ch} \alpha_k y \sin \beta_k y + \\ & + B_k^1 \operatorname{sh} \alpha_k y \sin \beta_k y + C_k^1 \operatorname{ch} \gamma_k y \cos \delta_k y + \mathcal{E}_k^1 \operatorname{sh} \gamma_k y \cos \delta_k y + \\ & + M_k^1 \operatorname{ch} \gamma_k y \sin \delta_k y + D_k^1 \operatorname{sh} \gamma_k y \sin \delta_k y. \end{aligned}$$

Тут

$$\alpha_k = \sqrt{\frac{1}{2} \left[\sqrt{(\mu_k^2 + a_k)^2 + \left(\frac{nk_x}{2} + b_k\right)^2} + (\mu_k^2 + a_k) \right]}$$

$$\beta_k = \sqrt{\frac{1}{2} \left[\sqrt{(\mu_k^2 + a_k)^2 + \left(\frac{nk_x}{2} + b_k\right)^2} - (\mu_k^2 + a_k) \right]}$$

$$\gamma_k = \sqrt{\frac{1}{2} \left[\sqrt{(\mu_k^2 - a_k)^2 + \left(\frac{nk_x}{2} - b_k\right)^2} + (\mu_k^2 - a_k) \right]}$$

$$\delta_k = \sqrt{\frac{1}{2} \left[\sqrt{(\mu_k^2 - a_k)^2 + \left(\frac{nk_x}{2} - b_k\right)^2} - (\mu_k^2 - a_k) \right]}$$

$$a_k = \sqrt{\frac{1}{2} \left[\sqrt{\frac{n^4 k_x^4}{16} + \mu_k^4 n^2 (k_x - k_y)^2} - \frac{n^2 k_x^2}{4} \right]}$$

$$b_k = \sqrt{\frac{1}{2} \left[\sqrt{\frac{n^4 k_x^4}{16} + \mu_k^4 n^2 (k_x - k_y)^2} + \frac{n^2 k_x^2}{4} \right]}$$

$$\alpha_k^* = \sqrt{\frac{1}{2} \left[\sqrt{(\mu_k^{*2} + a_k^*)^2 + \left(\frac{nk_y}{2} - b_k^*\right)^2} + (\mu_k^{*2} + a_k^*) \right]}$$

$$\beta_k^* = \sqrt{\frac{1}{2} \left[\sqrt{(\mu_k^{*2} + a_k^*)^2 + \left(\frac{nk_y}{2} - b_k^*\right)^2} - (\mu_k^{*2} + a_k^*) \right]}$$

$$\gamma_k^* = \sqrt{\frac{1}{2} \left[\sqrt{(\mu_k^{*2} - a_k^*)^2 + \left(\frac{nk_y}{2} + b_k^*\right)^2} + (\mu_k^{*2} - a_k^*) \right]}$$

$$\delta_k^* = \sqrt{\frac{1}{2} \left[\sqrt{(\mu_k^{*2} - a_k^*)^2 + \left(\frac{nk_y}{2} + b_k^*\right)^2} - (\mu_k^{*2} - a_k^*) \right]}$$

$$a_k^* = \sqrt{\frac{1}{2} \left[\sqrt{\frac{n^4 k_y^4}{16} + \mu_k^{*4} n^2 (k_x - k_y)^2} - \frac{n^2 k_y^2}{4} \right]}$$

$$b_k^* = \sqrt{\frac{1}{2} \left[\sqrt{\frac{n^4 k_y^4}{16} + \mu_k^{*4} n^2 (k_x - k_y)^2} + \frac{n^2 k_y^2}{4} \right]}$$

В нашому випадку

$$F_k = G_k = \mathcal{E}_k = M_k = 0, \quad F_k^1 = G_k^1 = \mathcal{E}_k^1 = M_k^1 = 0,$$

$$F_k^* = G_k^* = \mathcal{E}_k^* = M_k^* = 0, \quad F_k^{1*} = G_k^{1*} = \mathcal{E}_k^{1*} = M_k^{1*} = 0.$$

При рівномірно розподіленому навантаженні $q_k = \frac{4q}{k\pi} (-1)^{\frac{k-1}{2}}$, де k приймає тільки непарні значення. Щоб розв'язки рівнянь (3) і (4) були розв'язками вихідної системи (1) і (2), підставимо знайдені вирази для $W(x, y)$ і $\Phi(x, y)$ в рівняння (2) і будемо вимагати, щоб

воно задовольнялось тотожно. Це дає такі зв'язки між коефіцієнтами функцій $W(x, y)$ і $\Phi(x, y)$:

$$\begin{aligned} A_k^1 &= D \cdot n \cdot B_k, & B_k^1 &= -D \cdot n \cdot A_k, \\ D_k^1 &= -D \cdot n \cdot C_k, & C_k^1 &= D \cdot n \cdot D_k, \\ A_k^{1*} &= D \cdot n \cdot B_k^*, & B_k^{1*} &= -D \cdot n \cdot A_k^*, \\ D_k^{1*} &= -D \cdot n \cdot C_k^*, & C_k^{1*} &= D \cdot n \cdot D_k^*, \end{aligned}$$

При таких співвідношеннях між коефіцієнтами рівняння (1) задовольняється тотожно. Отже, загальний розв'язок системи (1), (2) у вибраній формі має вигляд:

$$\begin{aligned} w &= \sum_{k=1}^{\infty} (A_k^* \operatorname{ch} \alpha_k^* x \cdot \cos \beta_k^* x + B_k^* \operatorname{sh} \alpha_k^* x \cdot \sin \beta_k^* x + \\ &+ C_k^* \operatorname{ch} \gamma_k^* x \cdot \cos \delta_k^* x + D_k^* \operatorname{sh} \gamma_k^* x \cdot \sin \delta_k^* x) \cos \mu_k^* y + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cdot \operatorname{ch} \alpha_k y \cos \beta_k y + B_k \cdot \operatorname{sh} \alpha_k y \cdot \sin \beta_k y + C_k \cdot \operatorname{ch} \gamma_k y \cdot \cos \delta_k y + \\ &+ D_k \cdot \operatorname{sh} \gamma_k y \cdot \sin \delta_k y) \cos \mu_k x + \frac{1}{D} \sum_{k=1,3,5,\dots} \frac{q_k}{\mu_k^4 + n^2 k_y^2} \cos \mu_k x. \\ \Phi &= D \cdot n \sum_{k=1}^{\infty} (B_k^* \operatorname{ch} \alpha_k^* x \cos \beta_k^* x - A_k^* \operatorname{sh} \alpha_k^* x \cdot \sin \beta_k^* x + \\ &+ D_k^* \operatorname{ch} \gamma_k^* x \cos \delta_k^* x - C_k^* \operatorname{sh} \gamma_k^* x \cdot \sin \delta_k^* x) \cos \mu_k^* y + \\ &+ D \cdot n \sum_{k=1}^{\infty} (B_k \cdot \operatorname{ch} \alpha_k y \cdot \cos \beta_k y - A_k \operatorname{sh} \alpha_k y \cdot \sin \beta_k y + D_k \cdot \operatorname{ch} \gamma_k y \cdot \cos \delta_k y - \\ &- C_k \operatorname{sh} \gamma_k y \cdot \sin \delta_k y) \cos \mu_k x + n^2 k_y \sum_{k=1,3,5,\dots} \frac{q_k \cdot \cos \mu_k x}{\mu_k^2 (\mu_k^4 + n^2 k_y^2)}. \end{aligned}$$

Підставляючи значення W і Φ у вирази для зміщень u і v

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{Eh} \int_0^x \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right) dx + k_x \int_0^x w \cdot dx, \\ v &= \frac{1}{Eh} \int_0^y \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right) dy + k_y \int_0^y w \cdot dy, \end{aligned}$$

знайдемо:

$$\begin{aligned} u &= \sum_{k=1,3,5,\dots} \left\{ \operatorname{ch} \alpha_k y \cos \beta_k y \left[B_k (\mu_k^2 (1 + \nu) + a_k) + A_k \left(\frac{nk_x}{2} - b_k \right) \right] + \right. \\ &+ \operatorname{sh} \alpha_k y \sin \beta_k y \left[B_k \left(\frac{nk_x}{2} - b_k \right) - A_k (\mu_k^2 (1 + \nu) + a_k) \right] + \\ &+ \operatorname{ch} \gamma_k y \cos \delta_k y \left[D_k (\mu_k^2 (1 + \nu) - a_k) + C_k \left(\frac{nk_x}{2} + b_k \right) \right] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \operatorname{sh} \gamma_k y \sin \delta_k y \left[D_k \left(\frac{nk_x}{2} + b_k \right) - C_k (\mu_k^2 (1 + \nu) - \alpha_k) \right] \left\{ \frac{1}{n \mu_k} \sin \mu_k x + \right. \\
& + \sum_{k=1,3,5,\dots} \left\{ \frac{\sin \beta_k^* x \operatorname{ch} \alpha_k^* x}{n (\alpha_k^{*2} + \beta_k^{*2})} [B_k^* \lambda_k^* + A_k^* \kappa_k^*] + \right. \\
& + \frac{\cos \beta_k^* x \operatorname{sh} \alpha_k^* x}{n (\alpha_k^{*2} + \beta_k^{*2})} [-B_k^* \kappa_k^* + A_k^* \lambda_k^*] + \frac{\sin \delta_k^* x \operatorname{ch} \gamma_k^* x}{n (\gamma_k^{*2} + \delta_k^{*2})} [D_k^* \epsilon_k^* + C_k^* \omega_k^*] + \\
& + \frac{\cos \delta_k^* x \operatorname{sh} \gamma_k^* x}{n (\gamma_k^{*2} + \delta_k^{*2})} [-D_k^* \omega_k^* + C_k^* \epsilon_k^*] \left. \right\} \cos \mu_k y + \\
& + \frac{k_x + \nu k_y}{D} \sum_{k=1,3,5,\dots} \frac{q_k}{\mu_k (\mu_k^4 + n^2 k^2 y)} \sin \mu_k x. \\
v = & \sum_{k=1,3,5,\dots} \left\{ \operatorname{ch} \alpha_k^* x \cos \beta_k^* x \left[B_k^* (\mu_k^{*2} (1 + \nu) + a_k^*) + A_k^* \left(\frac{nk_y}{2} + b_k^* \right) \right] + \right. \\
& + \operatorname{sh} \alpha_k^* x \sin \beta_k^* x \left[B_k^* \left(\frac{nk_y}{2} + b_k^* \right) - A_k^* (\mu_k^{*2} (1 + \nu) + a_k^*) \right] + \\
& + \operatorname{ch} \gamma_k^* x \cos \delta_k^* x \left[D_k^* (\mu_k^{*2} (1 + \nu) - a_k^*) + C_k^* \left(\frac{nk_y}{2} - b_k^* \right) \right] + \\
& + \operatorname{sh} \gamma_k^* x \sin \delta_k^* x \left[D_k^* \left(\frac{nk_y}{2} - b_k^* \right) - C_k^* (\mu_k^{*2} (1 + \nu) - a_k^*) \right] \left. \right\} \frac{1}{n \mu_k^*} \sin \mu_k^* y + \\
& + \sum_{k=1,3,5,\dots} \left\{ \frac{\sin \beta_k y \operatorname{ch} \alpha_k y}{n (\alpha_k^2 + \beta_k^2)} [A_k \kappa_k + B_k \lambda_k] + \frac{\cos \beta_k y \operatorname{sh} \alpha_k y}{n (\alpha_k^2 + \beta_k^2)} [A_k \lambda_k - B_k \kappa_k] + \right. \\
& + \frac{\sin \delta_k y \operatorname{ch} \gamma_k y}{n (\gamma_k^2 + \delta_k^2)} [C_k \omega_k + D_k \epsilon_k] + \frac{\cos \delta_k y \operatorname{sh} \gamma_k y}{n (\gamma_k^2 + \delta_k^2)} [C_k \epsilon_k - D_k \omega_k] \left. \right\} \cos \mu_k x. \\
\lambda_k^* = & nk_x \alpha_k^* - \mu_k^{*2} \beta_k^* + \nu \beta_k^* (\alpha_k^{*2} + \beta_k^{*2}), \\
\kappa_k^* = & nk_x \beta_k^* + \mu_k^{*2} \alpha_k^* + \nu \alpha_k^* (\alpha_k^{*2} + \beta_k^{*2}), \\
\epsilon_k^* = & nk_x \gamma_k^* - \mu_k^{*2} \delta_k^* + \nu \delta_k^* (\gamma_k^{*2} + \delta_k^{*2}), \\
\omega_k^* = & nk_x \delta_k^* + \mu_k^{*2} \gamma_k^* + \nu \gamma_k^* (\gamma_k^{*2} + \delta_k^{*2}), \\
\lambda_k = & nk_y \alpha_k - \mu_k^2 \beta_k + \nu \beta_k (\alpha_k^2 + \beta_k^2), \\
\kappa_k = & nk_y \beta_k + \mu_k^2 \alpha_k + \nu (\alpha_k^2 + \beta_k^2) \alpha_k; \\
\epsilon_k = & nk_y \gamma_k - \mu_k^2 \delta_k + \nu (\gamma_k^2 + \delta_k^2) \delta_k; \\
\omega_k = & nk_y \delta_k + \mu_k^2 \gamma_k + \nu (\gamma_k^2 + \delta_k^2) \gamma_k.
\end{aligned}$$

Невідомі коефіцієнти, які входять у вирази для функцій W і Φ , визначаються з нескінченної системи лінійних рівнянь, яка одержується при задоволенні граничних умов. Так, у випадку жорсткого зашліщення країв, систему рівнянь для визначення невідомих

$$A_k, B_k, C_k, D_k, A_k^*, B_k^*, C_k^*, D_k^*$$

одержимо, задовольняючи умовам:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x=\pm \frac{a}{2}} &= 0; & u \Big|_{x=\pm \frac{a}{2}, y=\pm \frac{b}{2}} &= 0, \\ \frac{\partial w}{\partial y} \Big|_{y=\pm \frac{b}{2}} &= 0; & v \Big|_{x=\pm \frac{a}{2}, y=\pm \frac{b}{2}} &= 0, \\ w \Big|_{x=\pm \frac{a}{2}, y=\pm \frac{b}{2}} &= 0; \end{aligned}$$

У випадку шарнірного опирання на жорсткий контур, коли краї оболонки можуть вільно переміщатись не розтягуючись, для визначення невідомих коефіцієнтів одержуємо скінчену систему рівнянь. Показавши $k_x = k_y = \frac{1}{R}$, одержуємо розв'язок задачі для сферичної оболонки, а показавши $k_y = 0$, $k_x \neq 0$ — розв'язок задачі для циліндричної оболонки.

При розгляді великих прогинів, знайдений розв'язок може бути прийнятий за перше наближення.

Розрахунок жорстко-защіпленої скляної оболонки під рівномірною розподіленою навантаженням проводився при таких даних:

$$h = 0,45 \text{ см}; R = 76 \text{ см}; \nu = 0,23; E = 0,6946 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2;$$

$$\frac{a}{b} = 1,37.$$

Внаслідок симетрії задачі сталі інтегрування в виразах функцій W і Φ з парними індексами « k » рівні нулю. При підрахунках брались два наближення ($K = 1,3$), що забезпечило виконання граничних умов з точністю до 10%.

Розрахунки показали, що зусилля N_x досягає максимальної величини, рівної $-43,4q$ в центрі оболонки; зусилля N_y досягає максимальної величини $-40,3q$ в точці $\left(\frac{3a}{16}; 0\right)$; згинаючий момент M_x досягає максимальної величини $-5,8q$ в точці $\left(\frac{a}{2}; \frac{b}{16}\right)$; згинаючий момент M_y досягає максимальної величини $-8,05q$ в точці $\left(\frac{5a}{16}; \frac{b}{2}\right)$.

Результати підрахунків показали, що в оболонці вздовж жорстко защіпленої більшої сторони згинаючий момент досягає максимального значення приблизно на $\frac{1}{4}$ сторони, а вздовж защіпленої коротшої — в точці, дуже близької до середини, що, очевидно, залежить від співвідношення довжин сторін оболонки.

ЛІТЕРАТУРА

1. Власов В. З. Общая теория оболочек. ГТТИ, М.—Л., 1949.
2. Тимошенко С. П. Пластинки и оболочки. ОГИЗ, Гостехиздат, 1948.
3. Вольмир А. С. Гибкие пластинки и оболочки. ГТТИ, М., 1956.
4. Назаров А. А. Доповіді АН УРСР, № 1, 1956.