

РОЗТЯГ ПРУЖНОЇ ПЛОЩИНИ З ДВОМА НЕРІВНИМИ КРУГОВИМИ ОТВОРАМИ, ПІДКРІПЛЕНИМИ АБСОЛЮТНО ЖОРСТКИМИ КІЛЬЦЯМИ

О. М. КУЛИК

Перша основна гранична задача для пружної площини з двома нерівними круговими отворами розглядалась Шерманом Д. Й. [1] і Пілстригачем Я. С. [2]. Для розв'язування другої основної граничної задачі для цієї ж області використовуємо метод Шереметьєва М. П. [3].

Початок системи координат візьмемо посередині між точками, що симетричні відносно обох кіл. При цьому вісь Ox приймемо за лінію центрів кіл.

На безмежності до площини прикладені зусилля

$$X_x^{(\infty)} = p, \quad Y_y^{(\infty)} = q.$$

Вказана задача зводиться до визначення двох функцій комплексного змінного $\varphi(z)$, $\psi(z)$, голоморфних в зовнішній області кіл із граничних умов

$$\overline{\varphi_1(t_j)} - t \varphi_1'(t_j) - \psi_1(t_j) = 2\mu C_j^* \text{ на } L_j \quad (j=1, 2). \quad (1)$$

C_j^* — дійсні постійні внаслідок симетрії області, яка розглядається, відносно осі x . Головний вектор зусиль, прикладених до контура L_j , повинен рівнятися нулю, тому шукані функції мають вигляд:

$$\begin{aligned} \varphi_1(z) &= \frac{p+q}{4} z + \varphi_{10}(z), \\ \psi_1(z) &= -\frac{p-q}{2} z + \psi_{10}(z). \end{aligned} \quad (2)$$

$\varphi_{10}(z)$, $\psi_{10}(z)$ — голоморфні функції в зовнішній області кіл, включаючи нескінченно віддалену точку.

Функція

$$z = \omega(\zeta) = a \frac{\zeta + b}{\zeta - b} \quad (3)$$

дає конформне відображення кругового кільця на зовнішність отворів L_1 і L_2 . Коефіцієнт b визначається з умови переходу кола радіуса r_2

в коло одиничного радіуса і з відповідності границь. Використовуючи (3), запишемо граничні умови в площині ζ :

$$\kappa \overline{\varphi(\sigma_j)} - \frac{\overline{\omega(\sigma_j)}}{\omega'(\sigma_j)} \varphi'(\sigma_j) - \psi(\sigma_j) = C_j \quad \text{на } \gamma_j \quad (j=1, 2). \quad (4)$$

σ_j — афікс точки на контурі γ_j .

На основі (3) із (2) одержимо

$$\begin{aligned} \varphi(\zeta) &= \frac{p+q}{4} \omega(\zeta) + \varphi_0(\zeta) \\ \psi(\zeta) &= -\frac{p-q}{2} \omega(\zeta) + \psi_0(\zeta) \end{aligned} \quad (5)$$

$\varphi_0(\zeta)$, $\psi_0(\zeta)$ — функції голоморфні в області кругового кільця, тому їх можна представити так

$$\varphi_0(\zeta) = P_1(\zeta) + Q_1(\zeta), \quad \psi_0(\zeta) = P_2(\zeta) + Q_2(\zeta) \quad (6)$$

Тут $P_1(\zeta)$, $P_2(\zeta)$ — правильні частини Лорановського розкладу функцій $\varphi_0(\zeta)$, $\psi_0(\zeta)$, а $Q_1(\zeta)$, $Q_2(\zeta)$ — його головні частини, тобто

$$\begin{aligned} P_1(\zeta) &= \sum_{\nu=0}^{\infty} m_{\nu} \zeta^{\nu}, & Q_1(\zeta) &= \sum_{\nu=1}^{\infty} n_{\nu} \zeta^{-\nu}, \\ P_2(\zeta) &= \sum_{\nu=0}^{\infty} g_{\nu} \zeta^{\nu}, & Q_2(\zeta) &= \sum_{\nu=1}^{\infty} h_{\nu} \zeta^{-\nu}. \end{aligned} \quad (7)$$

Підставимо значення функцій $\varphi(\sigma_2)$, $\psi(\sigma_2)$ в граничну умову на γ_2 . Приймаючи до уваги, що $\sigma_2 = R_2 \sigma$, $\sigma = e^{i\theta}$, $R_2 = 1$, одержимо граничні умови на γ_2 у вигляді:

$$\begin{aligned} &\kappa \overline{P_1(\sigma_2)} + \kappa \overline{Q_1(\sigma_2)} + \frac{(1+b\sigma_2)(\sigma_2-b)^2}{2b(1-b\sigma_2)} P_1'(\sigma_2) + \\ &+ \frac{(1+b\sigma_2)(\sigma_2-b)}{2b(1-b\sigma_2)} Q_2'(\sigma_2) - P_2(\sigma_2) - Q_2(\sigma_2) = \\ &= -\frac{p+q}{4} (\kappa-1) \frac{1+b\sigma_2}{1-b\sigma_2} - \frac{a(p-q)}{2} \cdot \frac{\sigma_2+b}{\sigma_2-b} + C_2. \end{aligned} \quad (8)$$

Аналогічно записується гранична умова на γ_1 :

$$\begin{aligned} &\kappa \overline{P_1(\sigma_1)} + \kappa \overline{Q_1(\sigma_1)} + \frac{(R_1^2+b\sigma_1)(\sigma_1-b)^2}{2b(R_1^2-b\sigma_1)} P_1'(\sigma_1) + \\ &+ \frac{(R_1^2+b\sigma_1)(\sigma_1-b)^2}{2b(R_1^2-b\sigma_1)} Q_1'(\sigma_1) - P_2(\sigma_1) - Q_2(\sigma_1) = \\ &= -\frac{a(p+q)}{4} (\kappa-1) \frac{R_1^2+b\sigma_1}{R_1^2-b\sigma_1} - \frac{a(p-q)}{2} \cdot \frac{\sigma_1+b}{\sigma_1-b} + C_1. \end{aligned} \quad (9)$$

З відповідності границь при відображенні кругового кільця на зовнішність двох кіл, впливає $\left| \frac{R_1}{b} \right| < 1$, або $\left| \frac{R_1^2}{b} \right| < R_1$. Щоб перейти від гра-

ничних значень функції до функцій в області кільця, використаємо властивості інтегралів типу Коші.

Помножимо граничну умову (8) на ядро Коші $\frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{d\sigma_2}{\sigma_2 - \zeta}$ і проінтегруємо по колу γ_2 . Додатній напрям інтегрування — проти ходу годинникової стрілки. В результаті одержимо при $|\zeta| < 1$:

$$\kappa \bar{m}_0 + \kappa \bar{Q}_1 \left(\frac{1}{\zeta} \right) + \frac{(1+b\zeta)(\zeta-b)^2}{2b(1-b\zeta)} P_1'(\zeta) + \frac{1}{b^3} \cdot \frac{(1-b^2)}{(1-b\zeta)} Q_1' \left(\frac{1}{b} \right) - \\ - P_2(\zeta) + \frac{n_1}{2b} = -\frac{a(\kappa-1)}{4} (p+q) \frac{1+b\zeta}{1-b\zeta} - \frac{a(p-q)}{2} + C_2; \quad (10)$$

при $|\zeta| > 1$:

$$\kappa \bar{m}_0 - \kappa \bar{P}_1 \left(\frac{1}{\zeta} \right) - \frac{(1+b\zeta)(\zeta-b)^2}{2b(1-b\zeta)} Q_1'(\zeta) + \\ + \frac{n_1}{2b} + \frac{(1-b^2)^2}{b^3(1-b\zeta)} Q_1' \left(\frac{1}{b} \right) + Q_2(\zeta) = -\frac{ab(p-q)}{b-\zeta}; \quad (11)$$

Помножимо на ядро Коші граничну умову на γ_1 і проінтегруємо при $|\zeta| < R_1$:

$$\kappa \bar{m}_0 + \kappa \bar{Q}_1 \left(\frac{R_1^2}{\zeta} \right) + \frac{(R_1^2+b\zeta)(\zeta-b)^2}{2b(R_1^2-b\zeta)} P_1'(\zeta) - \frac{R_1^2(R_1^2-b^2)^2}{b^3(R_1^2-b\zeta)} P_1' \left(\frac{R_1^2}{b} \right) + \\ + \frac{n_1}{2b} - P_2(\zeta) = \frac{a(p+q)}{4} (\kappa-1) - \frac{a(p-q)}{2} \cdot \frac{\zeta+b}{\zeta-b} + C_1. \quad (12)$$

при $|\zeta| > R_1$:

$$\kappa \bar{m}_0 - \kappa \bar{P}_1 \left(\frac{R_1^2}{\zeta} \right) - \frac{R_1^2(R_1^2-b^2)^2}{b^3(R_1^2-b\zeta)} P_1' \left(\frac{R_1^2}{b} \right) - \frac{(R_1^2+b\zeta)(\zeta-b)^2}{2b(R_1^2-b\zeta)} Q_1'(\zeta) + \\ + \frac{n_1}{2b} + Q_2(\zeta) = \frac{R_1^2(p+q)a(\kappa-1)}{2(R_1^2-b\zeta)}. \quad (13)$$

З одержаних рівнянь виключимо функції $P_2(\zeta)$ і $Q_2(\zeta)$. Для цього від рівняння (10) віднімемо (12), а від (11) віднімемо (13):

$$\kappa \left\{ \bar{Q}_1 \left(\frac{1}{\zeta} \right) - \bar{Q}_1 \left(\frac{R_1^2}{\zeta} \right) \right\} - \frac{(1-R_1^2)(\zeta-b)^2\zeta}{(1-b\zeta)(R_1^2-b\zeta)} P_1'(\zeta) + \\ + \frac{1}{b^3} \cdot \frac{(1-b^2)^2}{(1-b\zeta)} Q_1' \left(\frac{1}{b} \right) + \frac{R_1^2(R_1^2-b^2)^2}{b^3(R_1^2-b\zeta)} P_1' \left(\frac{R_1^2}{b} \right) = \\ = -\frac{a(\kappa-1)}{2} \cdot \frac{p+q}{1-b\zeta} - \frac{ab(p-q)}{b-\zeta} + C_2 - C_1. \quad (14)$$

$$-\kappa \left\{ \bar{P}_1 \left(\frac{1}{\zeta} \right) - \bar{P}_1 \left(\frac{R_1^2}{\zeta} \right) \right\} + \frac{(1-R_1^2)(\zeta-b)^2\zeta}{(1-b\zeta)(R_1^2-b\zeta)} Q_1'(\zeta) + \\ + \frac{(1-b^2)^2}{b^3(1-b\zeta)} Q_1' \left(\frac{1}{b} \right) + \frac{R_1^2}{b^3} \cdot \frac{(R_1^2-b^2)^2}{(R_1^2-b\zeta)} P_1' \left(\frac{R_1^2}{b} \right) = \\ = -\frac{ab}{b-\zeta} (p-q) - \frac{a(\kappa-1)(p+q)}{2} \cdot \frac{R_1^2}{R_1^2-b\zeta}. \quad (15)$$

Рівність (14) являє собою функцію, голоморфну в середині γ_1 , тому кожний доданок можна розкласти в ряд з додатніми показниками ζ :

$$\begin{aligned}\bar{Q}_1\left(\frac{1}{\zeta}\right) - \bar{Q}_1\left(\frac{R_1^2}{\zeta}\right) &= - \sum_{v=1}^{\infty} \bar{n}_v \frac{1-R_1^{2v}}{R_1^{2v}} \zeta^v, \\ \frac{(1-R_1^2)(\zeta-b)^2 \zeta}{(1-b\zeta)(R_1^2-b\zeta)} P_1'(\zeta) &= (1-R_1^2)(\zeta-b)^2 \sum_{v=1}^{\infty} \left\{ \sum_{p=1}^v \frac{p m_p b^{v-p} f_{v-p}}{R_1^{2(v-p+1)}} \right\} \zeta^v, \\ \frac{1}{b^3} \cdot \frac{(1-b^2)^2}{(1-b\zeta)} Q_1'\left(\frac{1}{b}\right) &= \frac{(1-b^2)^2}{b^3} Q_1'\left(\frac{1}{b}\right) \sum_{v=0}^{\infty} b^v \zeta^v, \\ \frac{R_1^2(R_1^2-b^2)^2}{b^3(R_1^2-b\zeta)} P_1'\left(\frac{R_1^2}{b}\right) &= \frac{(R_1^2-b^2)^2}{b^3} P_1'\left(\frac{R_1^2}{b}\right) \sum_{v=0}^{\infty} \frac{b^v}{R_1^{2v}} \zeta^v, \\ \frac{a(x-1)}{2} \cdot \frac{p+q}{1-b\zeta} &= \frac{a(x-1)(p+q)}{2} \sum_{v=0}^{\infty} b^v \zeta^v, \\ \frac{ab(p-q)}{b-\zeta} &= a(p-q) \sum_{v=0}^{\infty} \frac{\zeta^v}{b^v}.\end{aligned}$$

Після цього (14) приймає вигляд:

$$\begin{aligned}& -x \sum_{v=1}^{\infty} \bar{n}_v \frac{1-R_1^{2v}}{R_1^{2v}} \zeta^v - (1-R_1^2)(\zeta-b)^2 \sum_{v=1}^{\infty} \left\{ \sum_{p=1}^v \frac{p m_p b^{v-p} f_{v-p}}{R_1^{2(v-p+1)}} \right\} \zeta^v + \\ & + \frac{(1-b^2)^2}{b^3} Q_1'\left(\frac{1}{b}\right) \sum_{v=0}^{\infty} b^v \zeta^v + \frac{(R_1^2-b^2)^2}{b^3} P_1'\left(\frac{R_1^2}{b}\right) \sum_{v=0}^{\infty} \frac{b^v}{R_1^{2v}} \zeta^v = \\ & = - \frac{a(x-1)(p+q)}{2} \sum_{v=0}^{\infty} b^v \zeta^v - a(p-q) \sum_{v=0}^{\infty} \frac{\zeta^v}{b^v} + C_2 - C_1.\end{aligned}\quad (16)$$

Рівність (15) являє собою функцію, голоморфну зовні γ_2 , тому кожний доданок можна розкласти в ряд в околі нескінченно віддаленої точки:

$$\begin{aligned}\bar{P}_1\left(\frac{1}{\zeta}\right) - \bar{P}_1\left(\frac{R_1^2}{\zeta}\right) &= \sum_{v=0}^{\infty} \bar{m}_v (1-R_1^{2v}) \zeta^{-v}, \\ \frac{(1-R_1^2)(\zeta-b)^2 \zeta}{(1-b\zeta)(R_1^2-b\zeta)} Q_1'(\zeta) &= -(1-R_1^2)(\zeta-b)^2 \sum_{v=1}^{\infty} \left\{ \sum_{i=1}^v \frac{i n_i f_{v-i}}{b^{v-i+2}} \right\} \zeta^{-(v+2)}, \\ \frac{(1-b^2)^2}{b^3(1-b\zeta)} Q_1'\left(\frac{1}{b}\right) &= - \frac{(1-b^2)^2}{b^3} Q_1'\left(\frac{1}{b}\right) \sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{b^v \zeta^v};\end{aligned}$$

Для визначення m_k і n_k будемо мати систему рівнянь (при $k \geq 2$):

$$\begin{aligned} & \kappa(1-R_2^{2k})n_k + b^2(1-R_1^2)kR_1^{2(k-1)}m_k = \frac{a(\kappa-1)(p+q)}{2}(bR_1^2)^k + \\ & + a\left(\frac{R_1^2}{b}\right)^k(p-q) + (1-b^2)^2Q_1'\left(\frac{1}{b}\right)b^{k-3}R_1^{2k} + (R_1^2-b^2)^2b^{k-3}P_1'\left(\frac{R_1^2}{b}\right) - \\ & - (1-R_1^2)\sum_{i=1}^{k-1}im_iR_1^{2(i-1)}(R_1^2f_{k-i-2}b^{k-i-2} - 2R_1^2f_{k-i-1}b^{k-i} + f_{k-i}b^{k-i+2}); \\ & \frac{1-R_1^2}{b^2}kn_k + \kappa(1-R_1^{2k})m_k = -ab^k(p-q) - \frac{a(\kappa-1)(p+q)}{2}\left(\frac{R_1^2}{b}\right)^2 - \\ & - \frac{(1-b^2)^2}{b^{k+3}}Q_1'\left(\frac{1}{b}\right) - \frac{(R_1^2-b^2)^2}{b^3}\left(\frac{R_1^2}{b}\right)^kP_1'\left(\frac{R_1^2}{b}\right) - \\ & - (1-R_1^2)\sum_{i=1}^{k-1}in_i(f_{k-i-2}b^{-(k-i-2)} - 2f_{k-i-1}b^{-(k-i)} + f_{k-i}b^{-(k-i+2)}). \end{aligned}$$

Тут слід покласти $f_{-1}=0$. Визначивши з цієї системи m_k, n_k ($k=1, 2, 3, \dots, l$), ми тим самим розв'яжемо поставлену задачу, бо по відомій функції $\varphi(\xi)$ визначається $\psi(\xi)$, а потім напруження в пружній площині. З цієї системи всі m_k, n_k ($k=1, 2, \dots, l$) визначаються через два параметри $P_1'\left(\frac{R_1^2}{b}\right)$ і $Q_1'\left(\frac{1}{b}\right)$. Вибравши l досить великим, підставимо m_k, n_k ($k=1, 2, \dots, l$) в ряди для $P_1(\xi)$ і $Q_1(\xi)$, продиференціюємо їх і замінимо в першому з них ξ на $\frac{R_1^2}{b}$ а в другому на $\frac{1}{b}$. В результаті одержимо систему двох рівнянь для визначення $P_1'\left(\frac{R_1^2}{b}\right)$ і $Q_1'\left(\frac{1}{b}\right)$. Визначивши $P_1'\left(\frac{R_1^2}{b}\right), Q_1'\left(\frac{1}{b}\right)$, знайдемо m_k, n_k ($k=1, 2, \dots, l$). Якщо l досить велике, то внаслідок збіжності рядів для $P_1(\xi)$ і $Q_1(\xi)$ практично можна вважати, що

$$m_l = 0, n_l = 0. \quad (20)$$

Ці два рівняння також можуть служити для визначення параметрів $P_1'\left(\frac{R_1^2}{b}\right)$ і $Q_1'\left(\frac{1}{b}\right)$, причому значення параметрів, визначені з рівнянь (20) в межах заданої точності, повинні співпадати з значенням цих параметрів, визначеними з системи

$$\begin{aligned} P_1'\left(\frac{R_1^2}{b}\right) &= \sum_{v=1}^l m_v v \left(\frac{R_1^2}{b}\right)^{v-1}, \\ Q_1'\left(\frac{1}{b}\right) &= - \sum_{v=1}^l n_v v b^{v+1}. \end{aligned}$$

Підрахунок напружень на контурі спаю кілець з пластинкою проводився при таких даних:

$$\text{Відношення радіусів кіл } \frac{r_1}{r_2} = \frac{1}{3};$$

$$\text{Віддаль між центрами кіл } O_1O_2 = 5r_1;$$

$$\text{Матеріал пластинки — мідь } \kappa = 2,08; \nu = 0,3.$$

Було підраховано по 6 коефіцієнтів функцій $P_1(\zeta) Q_1(S)$. В криволінійних координатах на площині ζs маємо

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{E} (\bar{\theta\theta} - \nu \bar{\rho\rho}), \quad (21)$$

але $\varepsilon_{\theta\theta} = 0$ є гранична умова задачі. Отже, рівність (21) служить для перевірки виконання граничних умов при підрахунках. Помилка у виконанні граничних умов на обох контурах не перевищує 0,2%.

Нижче приводяться значення напружень на контурах спаю кілець з пластинкою.

Розтяг вздовж осі ox

На контурі γ_1			
	$\frac{\bar{\theta\theta}}{p}$	$\frac{\bar{\rho\rho}}{p}$	$\frac{\bar{\rho\theta}}{p}$
0°	0,57584	1,91966	0,00000
15°	0,45881	1,52955	— 0,81337
30°	0,22100	0,73676	— 1,00384
45°	0,05087	0,16959	— 0,60387
60°	0,01222	0,04076	— 0,02076
75°	0,07004	0,23351	0,49547
90°	0,18876	0,62929	0,86292
105°	0,33560	1,11880	1,03042
120°	0,47580	1,58618	1,01636
135°	0,59535	1,98471	0,87627
150°	0,68722	2,29097	0,63064
165°	0,73943	2,46502	0,31892
180°	0,75434	2,51474	0,00000

На контурі γ_2

	$\frac{\bar{\theta\theta}}{p}$	$\frac{\bar{\rho\rho}}{p}$	$\frac{\bar{\rho\theta}}{p}$
0°	0,41787	1,39306	0,00000
15°	0,16242	0,54146	0,71953
30°	— 0,04905	— 0,16354	— 0,19765
45°	0,16785	0,55957	— 0,84919
60°	0,26909	0,89706	— 0,47094
75°	0,21389	0,71305	— 0,72131
90°	0,43989	1,46649	— 1,08652
105°	0,61714	2,05736	— 0,32981
120°	0,40622	1,35422	0,07016
135°	0,48655	1,62203	— 0,57365
150°	0,72794	2,42675	— 0,24609
165°	0,60220	2,00755	0,56114
180°	0,39364	1,31229	0,00000

Розтяг вздовж осі ou На контурі γ_1

	$\frac{\overline{ss}}{q}$	$\frac{\overline{pp}}{q}$	$\frac{\overline{p\theta}}{q}$
0°	— 0,04560	— 0,15202	0,00000
15°	0,05386	0,17954	0,65050
30°	0,24674	0,82257	0,75062
45°	0,36361	1,21218	0,37247
60°	0,36195	1,20665	— 0,08163
75°	0,29279	0,97610	— 0,40352
90°	0,19784	0,65953	— 0,57421
105°	0,10327	0,34627	— 0,60561
120°	0,02961	0,09871	0,55406
135°	— 0,02951	— 0,09832	— 0,47261
150°	— 0,07876	— 0,26255	— 0,34705
165°	— 0,10828	— 0,36099	— 0,17683
180°	— 0,11648	— 0,38833	0,00000

На контурі γ_2

	$\frac{\overline{ss}}{q}$	$\frac{\overline{pp}}{q}$	$\frac{\overline{p\theta}}{q}$
0°	0,04937	0,16459	0,00000
15°	0,30192	1,00652	— 0,69628
30°	0,50557	1,68541	0,23489
45°	0,27856	0,92864	0,88287
60°	0,16922	0,56413	0,47850
75°	0,22315	0,74391	0,68195
90°	0,00640	0,02135	0,98931
105°	— 0,15000	— 0,50049	0,17931
120°	0,08615	0,28719	0,20551
135°	0,04355	0,14518	0,39076
150°	— 0,16752	0,55846	0,09875
165°	— 0,02060	— 0,06898	— 0,64320
180°	0,19540	0,65142	0,00000

ЛІТЕРАТУРА

1. Шерман Д. И. О напряжениях в весоной полуплоскости, ослабленной двумя круговыми отверстиями, П М М, т. 15, вып. 3, 1951.
2. Підстригач Я. С. Напруження в площині, ослабленій двома нерівними круговими отворами. ДАН УРСР № 6, 1953.
3. Шереметьев М. П. Упругое равновесие эллиптического кольца. ПММ т. 17, вып. I, 1953.