

ДО ПИТАННЯ ПРО ПОПЕРЕЧНИЙ УДАР ПРУЖНОГО ТІЛА
ОБ СТЕРЖЕНЬ

Ф. А. МАР'ЯМОВА

Теорія поперечного удару пружного тіла об стержень була створена в 1912 р. С. П. Тимошенком [1].

Ця теорія, якою користуються і тепер, заснована на диференціальному рівнянні поперечних коливань балки, що не враховує зсув і інерцію обертання

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

де

$$a = \sqrt{\frac{EI}{\rho\sigma}}.$$

Проте виявилось, що деякі експериментальні дані не цілком збігаються з розв'язком відповідного функціонального рівняння. Крім того, відомо, що рівняння (1) не має хвильового характеру. Таким чином, виникло питання про недосконалість сучасної теорії поперечного удару і про необхідність її уточнення.

Уточнення теорії поперечного удару може бути здійснено в напрямку уточнення теорії стиснення і співудару пружних тіл Г. Герца, врахування пластичного стану тіл, що співударяються, і уточнення диференціального рівняння поперечних коливань балки. До першого з цих напрямків належать роботи [2, 3], до другого — [3, 4, 5, 6, 7 і інш.], до третього — [1, 8, 9].

Мабуть, Бресс вперше ввів у 1859 р. поправки на інерцію обертання і поперечну силу в диференціальне рівняння поперечних коливань тонкого стержня Бернуллі—Ейлера. Диференціальне рівняння, в якому прийнято до уваги вплив інерції обертання, приведено у Релея (1877 р.). В 1921—1922 р. С. П. Тимошенко склав диференціальне рівняння поперечних коливань балки з врахуванням впливу інерції обертання і зсуву, що має вигляд:

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \left(\frac{1}{c_1^2} + \frac{1}{c_2^2} \right) \frac{\partial^4 y}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{1}{c_1^2} \cdot \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^4 y}{\partial t^4} = 0. \quad (2)$$

Тут

$$c_1 = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad c_2 = \sqrt{\frac{k'p}{\rho}}.$$

В 1948 р. Я. С. Уфлянд [10], застосувавши перетворення Лапласа—Карсона, довів хвильовий характер рівняння (2); при цьому для шарнірно-підпёртої балки (довжиною $2l$) він вживав такі граничні умови:

$$(y)_{x=l} = 0, \quad (3) \quad \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x=0} = 0, \quad (4)$$

$$\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)_{x=l} = 0, \quad (5) \quad \left(\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\right)_{x=0} = \frac{P}{2EI}. \quad (6)$$

В 1952 р. Ф. А. Мар'ямова [11, 12], скористувавшись рівняннями (2), розглянула явище поперечного удару пружного тіла об тонкий пружний стержень. Всупереч поширеному погляду, згідно з яким поправки на інерцію обертання і зсув не істотні, це дослідження показало, що в ряді випадків при поперечному ударі не можна нехтувати впливом інерції обертання і поперечної сили на характеристики удару (динамічний прогин балки, зміщення шара, тривалість удару, силу взаємного тиску шара і балки).

В роботах [9, 12], користуючись методом М. О. Кільчевського, автор даної статті побудував три нові варіанти диференціальних рівнянь поперечних коливань стержня. Одержан таким чином рівняння мають той же вигляд, що і рівняння (2), проте, відрізняються від рівняння (2), а також одне від одного різними близькими поміж собою значеннями швидкостей C_1 і C_2 руху фронту хвилі. Виконані обчислення [12] показали, що незначні відміни в коефіцієнтах згаданих рівнянь поперечних коливань стержня практично не позначаються на характеристиках удару.

Очевидно, думка про те, що інерція обертання і зсув можуть істотно позначитися на параметрах, що характеризують явище поперечного удару, цікавила багатьох вчених, бо за останні роки з'явилося багато робіт, автори яких при дослідженні явища поперечного удару виходять не з рівняння Бернуллі—Ейлера, а з більш загального рівняння (2) С. П. Тимошенка.

З появою в 1952 р. роботи М. Денглера і М. Голанда [13] почалась дискусія з питання коректності системи граничних умов (3—6). М. Денглер і М. Голанд звернули увагу на те, що граничні умови (4) і (6) суперечать одна одній, а зважаючи на те, що умова (6) впливає з формули $Q = k'\beta\sigma$ елементарної теорії згину, покладеної С. П. Тимошенком в основу рівняння (2), то умову (4) треба замінити. А саме необхідно прийняти, що $\left(\frac{\partial y_b}{\partial x}\right)_{x=0} = 0$, $\left(\frac{\partial y_s}{\partial x}\right)_{x=0} = \frac{P}{2k'\mu\sigma}$. Отже, граничні умови задачі набувають вигляду:

$$(y_b + y_s)_{x=l} = 0, \quad (3')$$

$$\left(\frac{\partial y_b}{\partial x}\right)_{x=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial y_s}{\partial x}\right)_{x=0} = \frac{P}{2k'\mu\sigma}, \quad (4')$$

$$\left(\frac{\partial^2 y_b}{\partial x^2}\right)_{x=l} = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 y_s}{\partial x^2}\right)_{x=l} = 0, \quad (5')$$

$$\left(\frac{\partial^3 y_b}{\partial x^3}\right)_{x=0} = 0; \quad \left(\frac{\partial^3 y_s}{\partial x^3}\right)_{x=0} = \frac{P}{2EI}. \quad (6')$$

Тут y_b і y_s — прогини балки, що викликані відповідно поворотом перерізу і зсувом.

З приводу граничних умов (3'—6') Я. С. Уфлянд¹) зауважив, що хоч ця система і коректна в тому розумінні, що вона не суперечить елементарній теорії згину, але важко уявити фізичний зміст стрибка кута нахилу дотичної до пружної лінії балки в точці удару (умова (4')).

Стаття М. Данглера і М. Голанда з'явилась джерелом появи ряду робіт [14, 15, 16], в яких граничні умови задачі, що розглядається, трактуються аналогічно. В цих роботах автори користувались не узагальненим рівнянням С. П. Тимошенка (2), а еквівалентною йому системою двох рівнянь (2а):

$$\left. \begin{aligned} EI \frac{\partial^3 y_b}{\partial x^3} + k' \mu \sigma \frac{\partial y_s}{\partial x} - I \rho \frac{\partial^3 y_b}{\partial x \partial t^2} &= 0, \\ \rho \sigma \frac{\partial y_b}{\partial t^2} + \rho \sigma \frac{\partial^2 y_s}{\partial t^2} - k' \sigma I \frac{\partial^2 y_s}{\partial x^2} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2a)$$

Система рівнянь (2а) зустрічається і в деяких більш ранніх дослідженнях.

Р. Андерсон [14] зауважив, що коли виходити не з рівняння (2), а з системи рівнянь (2а), то одержимо більш прості вирази для згинаючого моменту і поперечної сили. Крім того, при цьому легше інтерпретувати фізичний зміст граничних умов.

В роботах [14, 15] автори твердять, що вторинні ефекти, одержувані від зсуву і інерції обертання, можуть при деяких умовах істотно впливати на коливання балки. Проте в цих роботах немає відповідного дослідження. Доводиться лише, що вплив додаткових факторів на величини частот незначний².

В останні роки з'явилась також низка робіт, присвячених дослідженню поперечного удару без врахування інерції обертання і зсуву. З цих робіт слід відзначити статтю А. Ерінгена [17], в якій поданий порівняльний аналіз розв'язування задачі про поперечний удар за допомогою різних наближених методів (енергетичного методу, методу Гальоркіна, методу численного інтегрування та інш.), Е. Бернхарта і У. Галдсмаса [18], в якій розглянуті деякі приклади розв'язування рівняння поперечного удару і дано порівняння результатів теоретичного і експериментального досліджень.

Відзначимо також статті Р. Міндліна і Г. Дерезевича [19] і Гудмана [20], в яких досліджене питання про залежність параметра k' , що входить в рівняння (2), від зсувних частот коливань балки.

Низка робіт присвячена узагальненню теорії поперечного удару на випадок зігнутого стержня, розтягнутого стержня, консольних балок, неоднорідних балок, пружнопластичного удару. В деяких статтях розглянуто різні методи експериментального дослідження явища поперечного удару і наведені результати поставлених експериментів. Зустрічаються також роботи, в яких поперечний удар досліджується за допомогою диференціального аналізатора, що дає змогу уникнути складних обчислень, які зв'язані з розв'язанням функціонального рівняння удару.

¹ Див. РЖ: «Механіка», 1956, 4678.

² Див. також [1], стор. 318—319.

II.

За допомогою метода Г. А. Грінберга ми розв'язали диференціальне рівняння (2) відповідно при граничних умовах (3—6) і (3'—6') і потім одержали вирази для динамічного прогину посередині стержня, що виникає внаслідок дії довільної зосередженої в точці $x=0$ збурюючої сили $P(0, t)$. Ці вирази відповідно мають вигляд:

$$y_1(0, t) = \frac{c_1 c_2}{EI} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\xi_k^2} F_k(t), \quad (7)$$

$$y_2(0, t) = y_1(0, t) + \frac{c_1 c_2}{k' \mu s l} \sum_{k=0}^{\infty} F_k(t), \quad (8)$$

де

$$F_k(t) = \frac{1}{m_{1k}^2 - m_{2k}^2} \int_0^t P(0, \tau) [m_{1k} \sin m_{2k}(t - \tau) - m_{2k} \sin m_{1k}(t - \tau)] d\tau,$$

$$m_{1k, 2k} = \sqrt{\frac{\alpha_k \pm \sqrt{\alpha_k^2 - 4c_1^2 c_2^2 \xi_k^4}}{2}}, \quad \xi_k = \frac{2k+1}{2} \cdot \frac{\pi}{l},$$

$$\alpha_k = (c_1^2 + c_2^2) \xi_k^2 + \frac{c_1^2 c_2^2}{a^2}.$$

Скориставшись відомим співвідношенням Г. Герца: $\alpha = k[P(t)]^{2/3}$, ми склали функціональне рівняння поперечного удару пружного тіла об стержень:

$$v_0 t - \frac{1}{m} \int_0^t d\tau \int_0^{\tau} P(0, \tau) d\tau = k[P(0, t)]^{2/3} + y(0, t), \quad (9)$$

де $y(0, t)$ означає відповідно вирази (7) і (8) в залежності від того, користуємось ми граничними умовами (3—6), чи (3'—6').

Результати розв'язання рівняння (9) для конкретного прикладу [12] при граничних умовах (3—6) і (3'—6) показали, що заміна граничної умови (4) на (4') практично не позначається на кількісних значеннях параметрів, які характеризують удар. Тому можна твердити, що некоректність граничної умови (4), про яку згадувалось вище, не впливає (принаймні, для певного класу задач) на кількісну картину явища поперечного удару пружного тіла об стержень.

ЛІТЕРАТУРА

1. Тимошенко С. П., Колебания в инженерном деле, Изд. физ.-матем. лит., М., 1959.
2. Штаерман И. Я., Контактная задача теории упругости, Гостехиздат, М., 1949.
3. Кильчевский Н. А., Теория соударений твердых тел, Гостехиздат, 1949.
4. Маламент Л. И., Вестник ВИА им. Куйбышева, № 29, 1940.
5. Давиденков Н. Н., Собр. тр. инст. строит. мех., № 11, 1949.
6. Lee E. H. and Symonds P. S., Trans. ASME, v. 74, 1952.
7. Сонгоу М. Ф., Journ. of Appl. Mech., v. 22, N 1, 1955.
8. Власов В. З., Тонкостенные упругие стержни, Изд. физ.-мат. лит., М., 1959.

9. Марьямова Ф. А., Сб. тр. Моск. заочн. полиграф. инст., в. 5, 1957;
 10. Уфлянд Я. С., Прикл. матем. и мех., т. 12, в. 3, 1948.
 11. Марьямова Ф. А., Изв. Киевск. политехн. ин-та, т. 16, 1954.
 12. Марьямова Ф. А., Автореф. дисс., Моск. инж. строит. ин-т, М., 1957.
 13. Dengler M. A., Goland M., Proc. First U. S. Nat. Congr. Appl. Mech., Publ. ASME, N. J., 1952.
 14. Anderson R. A., Journ. of Appl. Mech., v. 20, N 4, 1953.
 15. Boley B. A., Chao C. C., Journ. of Appl. Mech., v. 24, N 1, 1957.
 16. Флексер М. Ш., Прикл. матем. и мех., т. 22, 5, 1958.
 17. Eringen A. C., Journ. of Appl. Mech., v. 20, N 4, 1953.
 18. Barnhart E. A. and Goldsmith W., Journ. of Appl. Mech., v. 24, N 3, 1957.
 19. Mindlin R. D., Deresiwicz H., Proc. 2hd. U. S. Nat. Congr. Appl. Mech., Ann. Arbor, Mich., 1954, N. J. 1955.
 20. Dengler M. A., Goodman L. E., Journ. of Apl. Mech., v. 21, N 2, 1954.
-