

КРУЧЕННЯ СТЕРЖНЯ КУТОВОГО ПЕРЕРІЗУ

В. І. ЯКОВЛЄВА

Розглянемо випадок чистого кручення призматичного стержня, поперечний переріз якого має форму кута № 5.

Визначимо напруження на деяких точках перерізу.

Для розв'язання задачі досить відшукати функцію $\Phi(x, y)$ — функцію напруження, що відповідає всередині області рівнянню Пуассона

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = -2 \quad (1)$$

і набирає на її межі сталого значення, яке для однозв'язної області можна вважати рівним нулю.

Щоб розв'язати рівняння Пуассона застосуємо різницевий метод. Розв'язання цим методом засновано на тому, що частинні похідні функції $\Phi(x, y)$ замінюються скінченими різницями. При заміні диференціального рівняння різницеvim, одержуємо співвідношення, що пов'язує значення шуканої функції лише в окремих, в певному порядку розташованих точках. Точки ці виберемо на вершинах квадратної сітки. Ця сітка, нанесена на область, що цікавить нас, складається з двох систем взаємно перпендикулярних прямих (включаючи також прийняті в поперечному перерізі осі x, y), розташованих одна від одної на віддалі $h = 1$ мм (мал. 1).

Рівнянню (1) відповідає різницеве рівняння [3, 4]

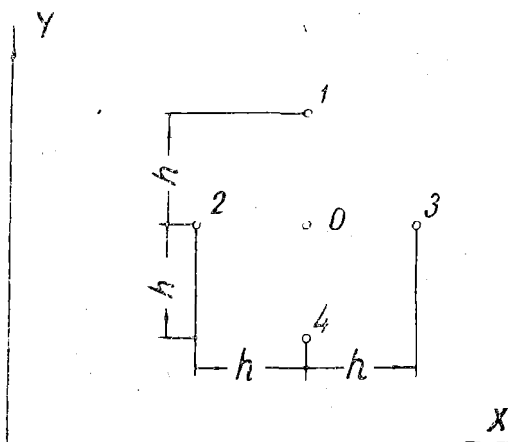
$$\Phi_{xx} + \Phi_{yy} = -2 \quad (2)$$

де, Φ_{xx} і Φ_{yy} означають другі різниці з x і y . Рівнянню (2) можна надати вигляд

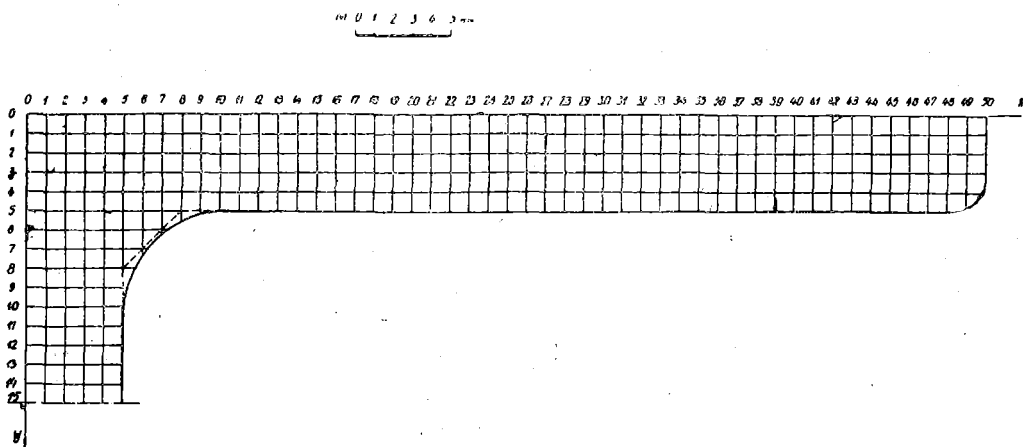
$$\Phi(x, y) = \frac{1}{4} [\Phi(x+h, y) + \Phi(x-h, y) + \Phi(x, y+h) + \Phi(x, y-h) + 2h^2]. \quad (3)$$

На нанесеній сітці накреслюється контур, що проходить по мірі можливості досить близько заданого.

Сітковий контур обмежує нову область, для якої розв'язується наближено гранична задача. У точках сіткового контура, що збігається з вихідним, значення функції $\Phi(x, y)$ дорівнює нулю, а в інших точках ці значення переносяться з вихідного на сітковий контур (мал. 2).



Мал. 1.



Мал. 2.

При перенесенні значень, в залежності від того, де лежить дана точка — поза чи всередині вихідного контура, користуємось відповідними формулами

$$\Phi_k = -\frac{\delta}{h - \delta} \Phi_A \quad (4)$$

і

$$\Phi_k = \frac{\delta}{h + \delta} \Phi_A \quad (5)$$

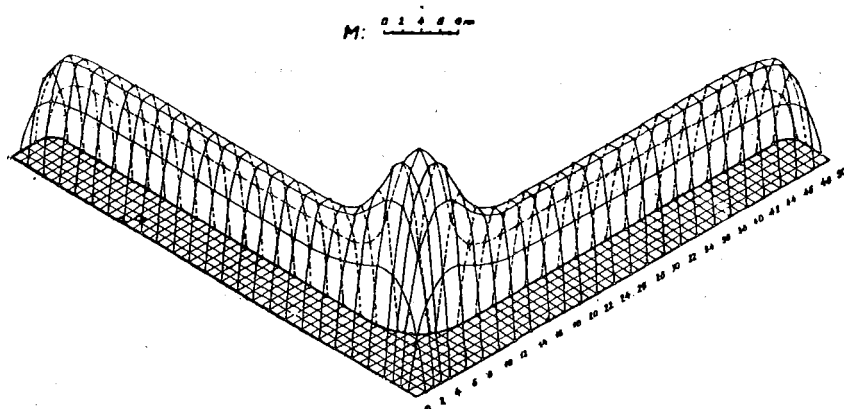
де: Φ_k — значення функції напруження в точці K сіткового контура,
 Φ_A — значення функції $\Phi(x, y)$ в найближчій внутрішній точці A ,
 що лежить з точкою K на одній паралелі,
 δ — віддаль точки K від вихідного контура.

Значення $\Phi(x, y)$ можна визначити, застосовуючи метод ітерації Лібмана.

Згідно рівняння (3) слід шукати таку функцію $\Phi(x, y)$, яка приймала б на контурі перерізу відомі значення, а у кожній його внутріш-

ній точці дорівнювала б середньому арифметичному чотирьох сусідніх значень, збільшеному на $\frac{h^2}{2}$.

Поставивши довільні значення функції у вершинах сітки всередині області (перше наближення), підраховуємо значення на наближеному контурі по (4), (5) і числа другого наближення по (3) і т. д.



Мал. 3.

Процес ітерації вважається закінченим, якщо в межах заданої точності числа $n+1$ наближення співпадають з числами n -го наближення. Для кожного нового наближення виправляються граничні значення за формулами (4) і (5).

Остаточне значення функції напруження одержано нами в сотих долях мм^2 .

Маючи ці значення, можна визначити напруження в точках перерізу за формулами

$$\tau_{zx} = \frac{M}{I_T} \frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad (6)$$

$$\tau_{zy} = -\frac{M}{I_T} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad (7)$$

де: M — крутильний момент,

I_T — геометричний фактор жорсткості.

Похідні, що входять у рівняння (6) і (7), визначаються наближено з співвідношень

$$\frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial x} \cong \frac{\Phi(x+h, y) - \Phi(x-h, y)}{2h}$$

$$\frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial y} \cong \frac{\Phi(x, y+h) - \Phi(x, y-h)}{2h}$$

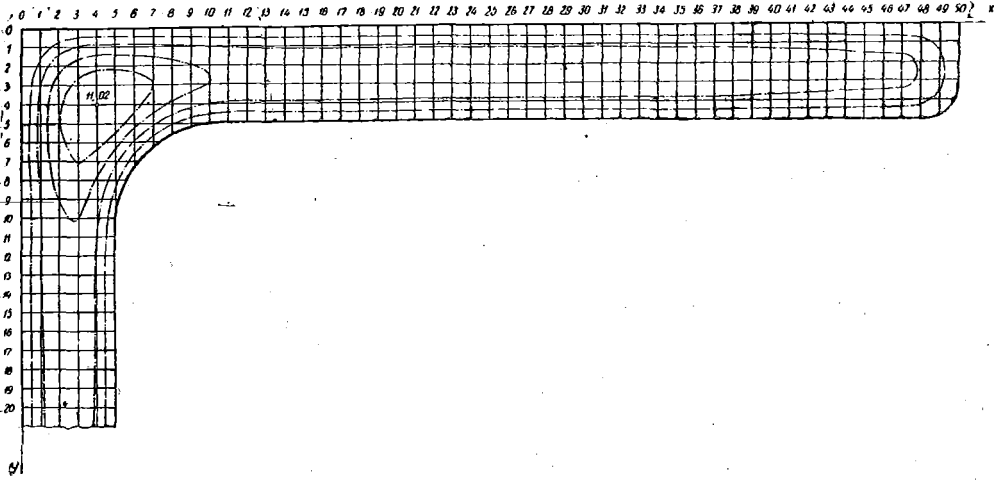
Геометричний фактор жорсткості

$$I_T = 2 \int_F \Phi dx dy \quad (8)$$

являє собою подвоєний об'єм горба напружень.

Горб напружень побудований в косокутній системі координат, так, щоб група аплікат $z = \Phi(x, y)$ лежала на одній прямій, що в значній мірі спрощує прорисовку горба [2, 6] (див. мал. 3). Нами також побудовані горизонталі, одержані в результаті перетину горба напружень системою горизонтальних площин, паралельних перерізу і розташованих один від одного на однакових віддальях. (мал. 4).

М 0 1 2 3 4 5 --



Мал. 4.

Нижче приводяться результати обчислювання жорсткості і найбільших напружень біля зовнішнього ребра полки і вхідного кута:

- за існуючими формулами,
- за нашими дослідженнями.

а) Геометричний фактор жорсткості, підрахований за відомою наближеною формулою, дорівнює

$$I_T = \frac{1}{3} \eta \sum \delta^3 b \quad [1] \text{ стр. 217.} \quad (9)$$

Кут № 5 $\eta = 1,1$; $I_T = 0,4354 \text{ см}^2$.

Напруження в полках — τ_n визначаються за формулами (1, 5, 7)

$$\tau_n = \frac{M}{I_T} \delta_{\max}, \quad (10)$$

де: $\delta_{\max}$ — середня товщина полки.

Кут № 5 $\delta_{\max} = 6 \text{ мм}$.

$$\tau_n = 0,5 \frac{M}{I_T}. \quad (11)$$

Найбільше напруження у вхідних кутах

$$\tau_{\max} = \alpha_k \tau_n, \quad (12)$$

де: α_k — підраховується за формулою Треффца

$$\alpha_k = 1,74 \sqrt[3]{\frac{c}{r}} \quad (13)$$

r — радіус округлення,
 c — товщина стінки по [7], стор. 284.

Кут № 5

$$c = 4 \text{ мм}; r = 5,5 \text{ мм}; \alpha_k = 1,685 \quad (14)$$

Геометричний фактор жорсткості

$$I_T = 0,4267 \text{ см}^4 \quad (15)$$

б) Найбільше напруження у зовнішніх ребер мають місце у точці $x = 5 \text{ мм}$.

Вдаючись до загушення сіток, одержимо:

1) біля зовнішнього контура

$$\tau_n = 0,640 \frac{M}{I_T} \quad (16)$$

2) біля вхідного кута

$$\tau_{\max} = 0,773 \frac{M}{I_T} \quad (17)$$

Коефіцієнт концентрації

$$\alpha_k = \frac{\tau_{\max}}{\tau_n} \quad (18)$$

$$\alpha_k = 1,21. \quad (19)$$

Результати досліджень зведені в табл. 1.

Таблиця 1

	I_T в см^4	Напруження, кг/см^2	
		$\tau_n \cdot M$	$\tau_{\max} \cdot M$
а) за наведеними формулами . . .	0,4354	1,148	1,934
б) за нашими дослідженнями . .	0,4267	1,500	1,812

ВИСНОВКИ

Порівнюючи наведені в таблиці I числа, бачимо, що напруження, підраховані за наведеними вище формулами, є заниженими для зовнішнього ребра і підвищеними для викружки.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Н. М. Беляев. Сопротивление материалов, ГИТТЛ, 1953.
- [2] С. Д. Пономарев, В. Л. Бидерман и др. Расчеты на прочность в машиностроении, т. I, ГНТИМЛ, 1956, глава VIII.
- [3] Б. К. Лоповок. Применение разностного метода для расчета прокатного уголка на кручение и на кручение совместно с растяжением. Труды Москов. ордена Ленина авиац. ин-та им. Серго Орджоникидзе, в. 17, 1952, стр. 90—100.
- [4] Д. Ю. Панов, Справочник по численному решению дифференциальных уравнений в частных производных, ГГТИ, 1951.
- [5] Г. Н. Федоров. Кручение трехгранного вала. Труды Москов. ордена Ленина авиационного института им. Серго Орджоникидзе, в. 17, 1952.
- [6] Н. М. Филоненко-Бородич, Курс сопротивления материалов, т. I, ГИТТЛ, 1956.
- [7] В. И. Яковлева. Кручение некоторых стержней швеллерного сечения. ДАН Азерб. ССР, т. XIV, № 10, 1958.