

## ЗМ'ЯКШЕНІ ГРАНИЧНІ УМОВИ ДЛЯ ПЛАСТИН З КРИВОЛІНІЙНИМИ ПРУЖНИМИ РЕБРАМИ

Н. П. ФЛЕЙШМАН

§ 1. Постановка задачі. З метою зменшення концентрації напруг біля отворів пластин в техніці широко вживається підсилення країв цих отворів пружними кільцями.

Граничні умови для пластини, у криволінійний отвір якої впаяно тонке кільце сталого перерізу, були виведені М. П. Шереметьєвим. При цьому кільце розглянуто, як криволінійний стержень, який має жорсткість на розтяг та згин у випадку узагальненого плоского напруженого стану [1], або — жорсткість на згин та кручення при згині тонких плит [2].

Різними авторами була розв'язана ціла низка задач про пружну рівновагу пластин з круговим отвором, край якого підкріплений тонким кільцем. Але при розрахунку пластин з підкріпленим некруговим отвором виникають значні труднощі [3, 4]. Тому постановку задачі доцільно спростити.

У цій статті виводяться наближені (зм'якшені) граничні умови спаю пластини з тонким криволінійним пружним стержнем змінного поперечного перерізу з іншого матеріалу.

Розглянемо тонку пластину з отвором, край якого підкріплений пружним кільцем. Осі координат  $Ox$  та  $Oy$  виберемо в серединній площині пластини. Припустимо, що вісь підкріплюючого стержня  $L$  лежить в площині  $xOy$  і, що контакт між пластиною та стержнем має місце по циліндричній поверхні  $S$ , яка проходить через  $L$  і нормальна до  $xOy$ . Замість точного задоволення всіх умов спаю, ми будемо вимагати, щоб на  $S$  виконувались тільки слідуючі умови:

А. Сили взаємодії між пластиною та стержнем, які діють на довільну частину  $S$  (між її двома довільними твірними), задовольняють третій закон Ньютона.

Б. Відносні видовження  $\varepsilon_\tau$  і  $\varepsilon_0$  лінійних елементів пластини та стержня, які рівновіддалені від площини  $xOy$ , дорівнюють між собою.

При цьому припускається, що підкріплюючий стержень настільки тонкий (тобто його поперечний переріз настільки вузький), що:

а) при згині тонкої плити можна нехтувати дією крутильних моментів в поперечних перерізах стержня, вважаючи, що він не має крутильної жорсткості, а має тільки жорсткість на згин. В цьому випадку будемо також вважати, що одна з головних осей інерції поперечного перерізу стержня лежить в серединній площині плити.

б) У випадку плоскої задачі можна нехтувати дією згинаючих моментів в поперечних перерізах стержня, розглядаючи його як пружну лінію, яка має тільки жорсткість на розтяг або стиск. Вказівка на те, що жорсткість на згин в цьому випадку дуже мало впливає на напруження в пластині, є в статті [1].

При таких припущеннях виведемо послаблені граничні умови задачі. Розглянемо окремо два випадки:

§ 2. Згин тонкої плити. Умови  $A$  та  $B$  записуються у вигляді

$$\int_0^s \left[ M_n - i \int_0^{s_1} \left( N_n + \frac{dH_{n\tau}}{ds_2} \right) ds_2 \right] \dot{t} ds_1 = \int_0^s \left[ m_1 - i \int_0^{s_1} p_1 ds_2 \right] \dot{t} ds_1 \text{ на } L, \quad (2.1)$$

$$\epsilon_\tau = \epsilon_0 \text{ для всіх } \eta \text{ на } S, \quad (2.2)$$

де:  $M_n$ ,  $H_{n\tau}$ ,  $N_n$  — згинаючий момент, крутильний момент та перерізуюча сила, які діють в плиті по  $L$  і відносяться до одиниці довжини цього контура;  $m_1$  і  $p_1$  — згинаючий момент та перерізуюча сила, які діють з боку плити на одиницю довжини осі стержня;  $t = x + iy$  — афікс точки на  $L$ ;  $s$ ,  $s_1$ ,  $s_2$  — дуги на  $L$ , які відраховуються від деякого початку  $O_1$ ;  $\dot{t} = \frac{dt}{ds}$ ,  $n$  — зовнішня нормаль до  $L$ ,  $\eta$  — віддалення точки плити або кільця від площини  $xOy$ .

Виходячи з умов рівноваги частини  $O_1s$  кільця, можна вивести слідуєчу залежність (див. [5], стор. 12)

$$iL_n \dot{t} = \int_0^s \left[ m(s_1) - i \int_0^{s_1} p(s_2) ds_2 \right] \dot{t} ds_1 + iC\bar{t} - C', \quad (2.3)$$

де

$$m(s) = m^* + m_1, \quad p(s) = p^* + p_1, \quad (2.4)$$

$m^*$  та  $p^*$  — задані зовнішні згинаючі моменти та перерізуючі сили, які діють на кільце;  $L_n$  — згинаючий момент в перерізі  $s$  кільця.  $C'$  та  $C$  — комплексна та дійсна сталі.

Крім того, відомо, що

$$\epsilon_0 = \frac{\eta L_n}{E_1 I}, \quad (2.5)$$

$$\epsilon_\tau = \frac{\partial u}{\partial x} \dot{x}^2 + \frac{\partial v}{\partial y} \dot{y}^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \dot{x}\dot{y}, \quad (2.6)$$

де  $u$ ,  $v$  — компоненти зміщення,  $E_1 I = A$  — змінна, взагалі кажучи, жорсткість кільця на згин,  $E_1$  — модуль Юнга кільця,  $\dot{x} = \frac{dx}{ds}$ ,  $\dot{y} = \frac{dy}{ds}$ .

Використовуючи відомі формули для переміщень [6], перетворимо (2.6) до вигляду

$$\begin{aligned} \epsilon_\tau &= -\eta \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \dot{x}^2 + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \dot{x}\dot{y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \dot{y}^2 \right] = \\ &= -\eta \operatorname{Re} \left[ i \frac{d}{ds} \left( \frac{\partial w}{\partial x} - i \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right], \end{aligned} \quad (2.7)$$

де  $w$  — прогин плити.

Враховуючи співвідношення (2.3), (2.5) і (2.7), виключаємо праві частини умов (2.1) та (2.2) і одержуємо одну зм'якшену граничну умову задачі

$$\int_0^s \left[ M_n - i \int_0^{s_1} \left( N_n + \frac{dH_{n\tau}}{ds_2} \right) ds_2 \right] \dot{t} ds_1 + \\ + i\dot{t}A \operatorname{Re} \left[ \dot{t} \frac{d}{ds} \left( \frac{\partial w}{\partial x} - i \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] = I^*(s) - iC\bar{t} + C', \quad (2.8)$$

де  $I^*(s)$  — відома функція, а саме

$$I^*(s) = - \int_0^s \left( m^* - i \int_0^{s_1} p^* ds_2 \right) \dot{t} ds_1. \quad (2.9)$$

Уявимо тепер прогин  $w$  плити за формулою [6]

$$w = \operatorname{Re} [z\varphi(z) + \chi(z)] + w_0(x, y),$$

де  $\varphi(z)$  та  $\chi(z)$  — аналітичні функції комплексного змінного  $z = x + iy$ ;  $w_0(x, y)$  — яке-небудь часткове рішення рівняння згину

$$\Delta \Delta w = \frac{q}{D},$$

де  $\Delta$  — оператор Лапласа;  $q$  — поперечне навантаження на плиту;  $D$  — циліндрична жорсткість.

Ліва частина (2.8) виражається відомим чином [6] через функції  $\varphi(z)$  та  $\psi(z) = \int \chi(z) dz$  і ця гранична умова приводиться до вигляду

$$- \frac{iA\dot{t}}{D(1-\nu)} \operatorname{Re} \left\{ \dot{t} \frac{d}{ds} [\overline{\varphi(t)} + \bar{t}\varphi'(t) + \psi(t)] \right\} + \\ + \kappa_1 \overline{\varphi(t)} - \bar{t}\varphi'(t) - \psi(t) = f_1(t) + iC_1\bar{t} - C_2, \quad (2.10)$$

де  $\kappa_1 = \frac{(3+\nu)}{(1-\nu)}$ ;  $\nu$  — коефіцієнт Пуассона;  $C_1$  — дійсна, а  $C_2$  — комплексна стала інтегрування;  $f_1(t)$  — відома функція, а саме

$$f_1(t) = - \frac{1}{D(1-\nu)} [I^*(s) + I_0(s)] + \frac{i\dot{t}A}{D(1-\nu)} \operatorname{Re} \left\{ \dot{t} \frac{d}{ds} \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} - i \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \right\},$$

$$I_0(s) = - \int_0^s \left( m_0 - i \int_0^{s_1} p_0 ds_2 \right) \dot{t} ds_1,$$

$$m_0 = -D \left\{ \nu \Delta w_0 + (1-\nu) \left[ \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \cos^2 \theta + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \sin^2 \theta + \right. \right. \\ \left. \left. + 2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \cos \theta \sin \theta \right] \right\}, \quad (2.11)$$

$$p_0 = D \left\{ \frac{dw_0}{dn} + (1-\nu) \frac{d}{ds} \left[ \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) \cos \theta \sin \theta + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \cos 2\theta \right] \right\},$$

$\theta$  — кут між нормаллю  $n$  до  $L$  та віссю  $x$ -ів.

Ступінь визначеності функцій  $\varphi(z)$  та  $\psi(z)$ , очевидно, такий самий, як і для першої основної задачі згину тонкої плити. У симетричному відносно центра випадку згину плити гранична умова (2.10) є точною.

§ 3. Узагальнений плоско-напружений стан. Запишемо умови  $A$  і  $B$  у вигляді [7]

$$\int_0^s (X_n + iY_n) ds = -\frac{1}{2h} \int_0^s (X_n^0 + iY_n^0) ds \text{ на } L, \quad (3.1)$$

$$\epsilon_r = \epsilon_0 \quad \text{на } L, \quad (3.2)$$

де  $X_n, Y_n$  — напруження, які діють вздовж  $L$  з боку кільця на пластину,  $X_n^0, Y_n^0$  — проекції зусиль, які діють на кільце з боку пластини і які віднесені до одиниці довжини осі кільця;  $2h$  — товщина пластини.

Припускаючи, що згинаючих моментів немає у поперечних перерізах кільця, запишемо умову рівноваги частини  $O_1s$  кільця таким чином

$$-\int_0^s (X_n^0 + iY_n^0) ds = \int_0^s (P_x + iP_y) ds + Nt - C_3, \quad (3.3)$$

де  $N$  — нормальна розтягуюча сила, яка діє в перерізі  $s$  безмоментного кільця,  $C_3$  — комплексна стала;  $P_x$  та  $P_y$  — віднесені до одиниці довжини осі кільця, проекції заданого зовнішнього навантаження.

Відносне видовження  $\epsilon_r$  визначимо за формулою (2.6), яку ми запишемо більш коротко у вигляді:

$$\epsilon_r = \operatorname{Re} \left[ \dot{t} \frac{d}{ds} (u + iv) \right]. \quad (3.4)$$

Враховуючи (3.4) та (3.3), а також що  $\epsilon_0 = N/E_1F$  ( $F$  — змінна, взагалі кажучи, площа поперечного перерізу кільця), виключаємо праві частини умов (3.1), (3.2) і одержуємо одну зм'якшену граничну умову, а саме

$$\begin{aligned} \int_0^s (X_n + iY_n) ds - \frac{iE_1F}{2h} \operatorname{Re} \left[ \dot{t} \frac{d}{ds} (u + iv) \right] = \\ = \frac{1}{2h} \int_0^s (P_x + iP_y) ds - C_3' \text{ на } L. \end{aligned} \quad (3.5)$$

За допомогою функцій комплексного змінного Г. В. Колосова — Н. И. Мусхелішвілі [8] остання формула запишеться так:

$$\begin{aligned} \frac{iE_1F}{4\mu h} \dot{t} \operatorname{Re} \left\{ \dot{x} \frac{d}{ds} [\kappa \overline{\varphi(t)} - \overline{t} \varphi'(t) - \psi(t)] \right\} + \\ + \overline{\varphi(t)} + \overline{t} \varphi'(t) + \psi(t) = -\frac{i}{2h} \int_0^s (P_x - iP_y) ds + \text{const на } L, \end{aligned} \quad (3.6)$$

де  $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$  — модуль зсуву,  $E$  — модуль Юнга пластини,

$$\kappa = \frac{3-\nu}{1+\nu}.$$

Ступінь визначеності функцій  $\varphi(z)$  та  $\psi(z)$  такий самий, як у випадку першої основної задачі плоскої теорії пружності.

Перевагою умови (3.6) порівняно до більш складної граничної умови, виведеної у статті [9], є його схожість із зм'якшеною граничною умовою (2.10) для підкріпленої плити, внаслідок чого подібними будуть також і методи вирішування цих задач.

**§ 4. Загальний випадок підкріплення пластин пружними ребрами.** Якщо підкріплююче ребро знаходиться не біля краю, а розташовано в області пластини, то в граничних умовах (2.1) та (3.1) під  $M_n$ ,  $N_n$ ,  $H_n$ ,  $X_n$  та  $Y_n$  треба розуміти стрибки, які відповідні моменти та зусилля в суміжних пластинах (примикаючих до пружного ребра) зазнають при переході через  $L$ .

Умови (2.2) та (3.2) в цьому випадку мають вигляд

$$\epsilon_{\tau}^{+} = \epsilon_{\tau}^{-} = \epsilon_0 \text{ на } L. \quad (4.1)$$

Тут і в дальшому значками  $+$  (плюс) або  $-$  (мінус) позначені граничні значення відповідної величини зліва або справа від  $L$ .

Отже, якщо ввести дві функції  $\varphi(z)$  та  $\psi(z)$  — кусочно голоморфні в області, яку займає серединна площа пластини, з лінією стрибків  $L$ , то зм'якшені граничні умови на  $L$  для цього випадку будуть:

$$\begin{aligned} a_1 \overline{\varphi^{+}(t)} + \overline{t} \varphi'^{+}(t) + \varphi^{+}(t) + iKt \operatorname{Re} \left\{ t \frac{d}{ds} [a_2 \overline{\varphi^{+}(t)} - \overline{t} \varphi'^{+}(t) - \varphi^{+}(t)] \right\} = \\ = a_1 \overline{\varphi^{-}(t)} + \overline{t} \varphi'^{-}(t) + \varphi^{-}(t) + f_2(t), \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left\{ t \frac{d}{ds} [a_2 \varphi^{+}(t) - \overline{t} \varphi'^{+}(t) - \varphi^{+}(t)] \right\} = \\ = \operatorname{Re} \left\{ t \frac{d}{ds} [a_2 \overline{\varphi^{-}(t)} - \overline{t} \varphi'^{-}(t) - \varphi^{-}(t)] \right\} + f_3(t), \end{aligned} \quad (4.3)$$

де: а) при згині тонкої плити

$$\begin{aligned} f_2(t) = \frac{1}{D(1-\nu)} [I^{*}(s) + I_0^{+}(s) - I_0^{-}(s)] - \\ - \frac{i t A}{D(1-\nu)} \operatorname{Re} \left\{ t \frac{d}{ds} \left( \frac{\partial w_0^{+}}{\partial x} - i \frac{\partial w_0^{+}}{\partial y} \right) \right\}, \end{aligned}$$

$$f_3(t) = \operatorname{Re} \left\{ t \frac{d}{ds} \left( \frac{\partial w_0^{-}}{\partial t} - \frac{\partial w_0^{+}}{\partial t} \right) \right\},$$

$$a_1 = -\frac{3+\nu}{1-\nu}, \quad a_2 = -1, \quad K = -\frac{A}{D(1-\nu)};$$

б) у випадку плоскої задачі

$$f_2(t) = -\frac{i}{2h} \int_0^s (P_x - iP_y) ds, \quad f_3(t) = 0,$$

$$a_1 = 1, \quad a_2 = \frac{3-\nu}{1+\nu}, \quad K = \frac{E_1 F}{4\mu h}.$$

## ЛІТЕРАТУРА

1. М. П. Шереметьев. Плоско-напряженное состояние пластинки с подкрепленным круговым отверстием. Инженерный сборник, т. XIV, 1953.
2. М. П. Шереметьев. Изгиб тонких плит с подкрепленным краем. Украинский математический журнал, т. V, № 1, 1953.
3. М. П. Шереметьев, Т. Л. Мартинович, Згин нескінченної пластинки, ослабленої еліптичним отвором, край якого підкріплений тонким пружним кільцем. Прикладна механіка, т. III, в. 2, 1957.
4. К. Н. Русинко. Деформация бесконечной пластинки с эллиптическим отверстием, край которой подкреплена тонким кольцом. Бюлетень наукової студентської конференції 1954 року, ч. II, Вид. Львівського університету, 1955.
5. Н. П. Флейшман. Пружна рівновага плити з ребрами жорсткості змінної кривизни. Наукові записки ЛДУ ім. Ів. Франка, т. 44, в. 8, серія мех.-мат., 1957.
6. Г. Н. Савин. Концентрация напряжений около отверстий. ГИТТЛ, 1951.
7. Н. П. Флейшман. Замечания к одной статье М. П. Шереметьева. Доповіді та повідомлення ЛДУ ім. Ів. Франка, в. 7, ч. III, 1957.
8. Н. И. Мусхелишвили. Некоторые основные задачи математической теории упругости, Изд-во АН СССР, 1954.
9. J. R. M. Radok, Problems of Plane Elasticity for Reinforced Boundaries. Journal of Applied Mechanics, vol. 22, N 2, 1955.