

К. В. Тир

## МЕТОД ИНВАРИАНТОВ ПОДОБИЯ В МЕХАНИКЕ МАШИН

### Исходные положения

Наращение темпов социалистического производства на базе комплексной механизации и автоматизации производственных процессов заставляет искать пути углубления теории расчета механизмов и машин.

Методика расчетов должна быть точной и вместе с тем достаточно рациональной.

Поэтому при расчете ответственных механизмов на смену громоздким и недостаточно точным графическим методам расчета приходят аналитические методы. Их использование расширяется благодаря все большему распространению современных счетно-решающих машин и заранее подготовленных обобщенных расчетных таблиц.

Составление таких таблиц зиждется на использовании основных положений теории подобия и теории размерностей в механике машин.

Все механические параметры движения материальных тел в пространстве и времени могут быть выражены либо *в абсолютных единицах* измерений, либо *в модулях* длины, времени и массы (или силы).

Так в физической системе абсолютных единиц измерения (ОСТ ВКС 6052) приняты сантиметр-грамм-секунда; в технической системе (ОСТ ВКС 6053) — метр-килограмм-секунда или, более укрупненно, — метр-тонна-секунда.

В качестве модуля измерения длин в машиностроении нередко используют такие величины, как модуль зацепления, диаметр начальной окружности (в зубчатых колесах), шаг резьбы, диаметр нарезанной части болта (в резьбовых соединениях), диаметр вала и т. п.

При обобщенном изучении периодического движения [16] удобно выбрать в качестве модулей измерений: для линейных величин — размах перемещения ведомого звена ( $S$ ); для масс — массу ведомого звена ( $m$ ); для времен — продолжительность цикла однозначного перемещения ведомого звена на размах  $S$  ( $T$ ).

Применительно к кривошипным механизмам с поступательным ведомым звеном более удобной является модульная система измерений с модулями: для длин — радиус кривошипа ( $r$ ), для масс — масса ползуна ( $m$ ), для времени — продолжительность поворота кривошипа на угол, равный 1 радиану, ( $T = \frac{1}{\omega_1}$ , где  $\omega_1$  — равномерная угловая скорость вала кривошипа). При качательном движении ведомого звена в качестве модуля измерения масс удобно принять интегральную величину — момент инерции масс ведомого звена ( $I$ ), а вместо линейного размаха учитывать угловой размах ведомого звена ( $\gamma_2$ ).

Известно, что каждая механическая величина ( $A$ ), в зависимости от ее размерности, может быть выражена в виде:

$$A = \frac{A}{m^\alpha S^\beta T^\gamma} m^\alpha S^\beta T^\gamma = q [m^\alpha S^\beta T^\gamma], \quad (1)$$

где  $q$  — безразмерный коэффициент, а  $[m^\alpha S^\beta T^\gamma]$  — размерный множитель, в котором степени независимых модулей  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  выбираются с учетом размерности величины  $A$ .

Необходимо обратить внимание на некоторые особенности равенства (1):

— для конкретно заданных физических величин  $A$ ,  $m$ ,  $S$  и  $T$  безразмерный коэффициент  $q = \frac{A}{m^\alpha S^\beta T^\gamma}$  остается неизмен-

ным при любом выборе абсолютной системы измерений, в то время как размерный множитель  $[m^\alpha S^\beta T^\gamma]$  численно изменяется в зависимости от этого выбора;

— если механическая величина  $A$  закономерно изменяется на протяжении цикла, то эти изменения связаны лишь с изменением безразмерной величины  $q$ , т. к. для заданных условий производный модуль измерений  $[m^\alpha S^\beta T^\gamma]$  остается при соизмерении конкретных позиционных механических параметров\* в каждом случае постоянным;

— для механически подобных циклически повторяющихся закономерных явлений в соответственных фазах цикла, для сходственных точек системы, величины безразмерных коэффициентов  $q$  равны и однозначны; на протяжении цикла эта величина ( $q$ )

\* Например, перемещений, скоростей, ускорений, мощности, крутящих моментов, механической работы и т. п. (К. Т.).

изменяется как определенная функция обобщенных координат и физических параметров подобия. В теории подобия величина  $q$  получила название инварианта подобия (симплекса, комплекса) [12].

В механике машин инварианты подобия являются функцией ряда геометрических и физических параметров, зависящих от структуры и схемы механизма, условий нагружения и трения в кинематических парах, расположения и величины движущихся масс, а также функцией относительного положения (позиции) механизма. Поэтому в литературе инварианты подобия в механике нередко именуют «функциями положения механизма», «передаточными функциями», «безразмерными функциями», «передаточными отношениями» и др. [1], [2], [7], [9], [13].

Для механически подобных систем и соответственных позиций, следовательно, можно записать (индекс  $\varphi$  при  $q$  показывает зависимость этого инварианта от положения механизма):

$$q_{\varphi} = \frac{A_1}{m_1^{\alpha} S_1^{\beta} T_1^{\gamma}} = \frac{A_2}{m_2^{\alpha} S_2^{\beta} T_2^{\gamma}} = \dots = \frac{A_n}{m_n^{\alpha} S_n^{\beta} T_n^{\gamma}} \quad (2)$$

Если для эталонной системы величина позиционного инварианта подобия ( $q_{\varphi}$ ) определена, то для всех механически подобных систем на той же позиции механизма сходственные величины равны:

$$A_2 = q_{\varphi} [m_2^{\alpha} S_2^{\beta} T_2^{\gamma}] ; \quad A_3 = q_{\varphi} [m_3^{\alpha} S_3^{\beta} T_3^{\gamma}] ; \dots$$

Если выбрать в качестве эталонной «единичную» систему, имеющую модули измерения равные  $m_1=1$ ;  $S_1=1$  и  $T_1=1$  (в любой абсолютной системе измерений) и определить величину  $A_1=q_{\varphi} \cdot 1$ , то численно величина  $A_1$  в этом случае будет равна инварианту подобия ( $q_{\varphi}$ ) для данной системы на данной позиции.

Исследованные позиционные инварианты подобия для «единичных» систем можно далее использовать для расчета всех механически подобных систем, как было указано выше.

При выбранной системе модулей измерения и конкретно заданных их величинах (например:  $m$ ,  $S$ ,  $T$ ) сравнение аналогичных механических величин (позиционных или экстремальных) при выборе различных механических систем возможно производить путем относительного сравнения:

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{q_2 [m^{\alpha} S^{\beta} T^{\gamma}]}{q_1 [m^{\alpha} S^{\beta} T^{\gamma}]} = \frac{q_2}{q_1} \quad (3)$$

т. е. пользуясь таблицами инвариантов подобия и не прибегая к подробным вычислениям.

С учетом сказанного ясно, что использование инвариантов подобия в механике машин, в случае накопления соответствующих справочных таблиц, даст возможность более точного и

углубленного расчета синтезируемых машин-автоматов, а также более обоснованного выбора законов периодического движения, а, следовательно, и рациональных схем исполнительных механизмов, с учетом конкретных условий работы (характера нагружения, назначения).

### Инварианты подобия важнейших механических величин при периодическом движении

В простейшем случае возвратно-поступательного движения ведомого звена (ползуна) его перемещения от крайнего начального положения ( $s$ ) можно выразить в виде:

$$s = f(t) = \frac{f\left(\frac{\varphi}{\varphi_y} \cdot \frac{\varphi_y}{\omega_1}\right) S}{S} = f(k) S = a_k S, \quad (4)$$

где  $k = \frac{\varphi}{\varphi_y}$  — относительное время или «позиция» механизма ( $\varphi_y$  — угол поворота главного вала за рассматриваемый однозначный цикл перемещения на размах  $S$ ), изменяющееся во всех случаях в пределах  $0 < k < 1$ ;  $a_k = \frac{s}{S} = f(k)$  — позиционный инвариант подобия перемещений, изменяющийся при любом периодическом движении в неизменных пределах  $0 < a_k < 1$  по соответствующему закону, определяемому структурой и схемой механизма;  $\varphi$  — текущий угол поворота главного вала, отсчитываемый от начальной фазы однозначного перемещения;  $s$  — текущее перемещение ползуна от начального (крайнего) положения;  $\omega_1$  — угловая скорость главного вала, принимаемая при расчетах инвариантов постоянной.

Скорость перемещения ползуна:

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{ds}{dk} \frac{dk}{dt} = f'(k) \frac{S}{T} = b_k \frac{S}{T}, \quad (5)$$

где  $b_k = f'(k) = \frac{v}{S T^{-1}}$  — позиционный инвариант подобия скорости, имеющий для каждой позиции каждого конкретного механизма, т. е. для любого закона движения и фазы цикла, совершенно определенную величину.

Аналогичным путем определяются инварианты подобия ускорений:

$$c_k = f''(k) = \frac{w}{S T^{-2}}. \quad (6)$$

Для обобщенного решения задач динамики в свете теории подобия введем в расчеты критерии динамического подобия — числа Ньютона ( $p$ ), представляющие инварианты подобия статических сил, определяемые обычным путем:

$$P_{ст} = \frac{P_{ст}}{m S T^{-2}} [m S T^{-2}] = p [m S T^{-2}], \quad (7)$$

где  $p = \frac{P_{ст}}{m S T^{-2}}$  — число Ньютона.

Полное динамическое подобие систем практически трудно достижимо, даже при необходимости и стремлении его воспроизведения. Однако введение в расчеты механики машин инвариантов подобия статических сил — чисел Ньютона дает возможность объективно сравнивать различные системы, условно поставленные в совершенно равные условия нагружения, с учетом конкретных практических задач [17]. Кроме того, открывается возможность составления таблиц соответствующих широко обобщенных динамических инвариантов, т. к. за каждой конкретной величиной числа Ньютона кроется бесчисленное множество соотношений величин  $P_{ст}$ ,  $m$ ,  $S$  и  $T$  (см. формулу (7)).

Заметим, что инвариантами подобия является и ряд знакомых нам из теории механизмов и машин безразмерных физических коэффициентов, используемых в динамике.

Например, сила трения ( $F$ ):

$$F = \frac{F}{R_n} \frac{R_n}{m S T^{-2}} [m S T^{-2}] = f p_{R_n} [m S T^{-2}],$$

где  $R_n$  — нормальное давление,  $f = \frac{F}{R_n}$  — коэффициент трения,

представляющий инвариант подобия силы трения при модуле  $R_n$  и  $p_{R_n}$  — число Ньютона для нормального давления  $R_n$ . Эти инварианты, как и все прочие инварианты подобия в механизме, являются функциями определенных физических параметров и позиций механизма, т. к. коэффициенты трения зависят от конкретных условий (от скорости движения, удельного давления, гладкости трущихся поверхностей и их физических свойств, от характеристики промежуточного слоя смазки), практически изменяющихся в зависимости от фазы цикла.

Использованная (эффективная) мощность ( $N_э$ ):

$$N_э = \frac{N_э}{N_{затр}} \frac{N_{затр}}{m S^2 T^{-3}} [m S^2 T^{-3}] = \eta_k \nu [m S^2 T^{-3}],$$

где  $N_{затр}$  — затрачиваемая мощность и  $\eta_k = \frac{N_э}{N_{затр}}$  — общеизвестный мгновенный коэффициент полезного действия механизма — инвариант подобия для использованной мощности при модуле

мощности  $N_{затр}$ , являющийся функцией параметров механического подобия, а также положения механизмов.

Потерянная мощность ( $N_{п}$ ):

$$N_{п} = \frac{N_{п}}{N_{затр}} \frac{N_{затр}}{m S^2 T^{-3}} [m S^2 T^{-3}] = \psi \nu [m S^2 T^{-3}],$$

где  $\psi = \frac{N_{п}}{N_{затр}}$  — мгновенный коэффициент потерь, а по сути инвариант потерянной мощности, зависящий от тех же параметров, что и  $\eta$ , т. к.

$$N_{п} = N_{затр} - N_{з} = (1 - \eta_k) N_{затр} = \psi N_{затр},$$

а  $\nu$  — инвариант затраченной мощности в выбранной системе модулей.

В геометрии, изучая метрику шара, мы выражаем все характерные величины через единый модуль измерения длин — диаметр шара ( $D$ ) — в виде:

длина большой окружности:  $L_0 = \frac{L_0}{D} D = \pi D;$

площадь диаметрального сечения:  $F = \frac{F}{D^2} D^2 = \frac{\pi}{4} D^2;$

объем:  $U = \frac{U}{D^3} D^3 = \frac{\pi}{6} D^3,$

где  $\pi$ ,  $\frac{\pi}{4}$ ,  $\frac{\pi}{6}$  — соответствующие константы подобия, независимые от выбора системы абсолютных единиц измерения, как и все инварианты.

Давно известно также применение таблиц кинематических позиционных безразмерных коэффициентов в виде  $\chi = \frac{s}{r}$  — для

перемещений,  $\xi = \frac{v}{\omega r}$  — для скоростей и  $\zeta = \frac{w}{\omega^2 r}$  — для ускорений

ползуна кривошипно-шатунных механизмов, представляющих инварианты подобия в модульной системе  $[m, \omega, r]$ .

Таким образом, практически геометрические и кинематические инварианты подобия уже давно косвенно используются в теории и практике проектирования машин при проведении точных расчетов.

Ныне необходимо обобщить и расширить их использование, систематизировав и дополнив методику применения инвариантов подобия в механике машин.

Механизмы машин служат для преобразования и передачи движения исполнительным органам от двигателя.

Поэтому для машиноведения представляет существенный интерес ряд производных динамических инвариантов подобия.  
*Инвариант суммарной мощности:*

$$u_k = \frac{N_{\Sigma}}{m S^2 T^{-3}} = \frac{(P_{ст} + P_{ин}) v}{m S^2 T^{-3}} = (p_k + c_k) b_k, \quad (8)$$

где  $p_k$  — позиционный инвариант статической силы, а  $c_k$  — позиционный инвариант ускорений (он же является инвариантом силы инерции),  $b_k$  — позиционный инвариант скорости.

*Инвариант кинетической мощности*, расходуемой только на изменение движения массы, при отсутствии статических сил:

$$d_k = \frac{N_{кин}}{m S^2 T^{-3}} = \frac{P_{ин} v}{m S^2 T^{-3}} = c_k b_k. \quad (9)$$

*Инвариант крутящих моментов* на валу, передающем движение цикловым механизмам:

$$M_{кр \Sigma} = \frac{N_{\Sigma}}{\omega \eta_k} = \frac{(p_k + c_k) b_k}{\eta_k} \left[ \frac{m S^2}{\omega T^3} \right] = \frac{u_k}{\varphi_y \eta_k} \left[ \frac{m S^2}{T^2} \right], \quad (10)$$

где  $\omega$  — угловая скорость рассматриваемого вала и  $\varphi_y = \omega T$  — угол его поворота за однозначный цикл перемещения;  $\eta_k$  — позиционный коэффициент полезного действия цепи передаточных и исполнительных механизмов (т. е. инвариант использованной мощности).

Следовательно, инвариант крутящего момента на валу передаточного механизма от суммы статических сил и сил инерции:

$$\frac{M_{кр \Sigma}}{m S^2 T^{-2}} = \frac{(p_k + c_k) b_k}{\varphi_y \eta_k} = \frac{u_k}{\varphi_y \eta_k}, \quad (11)$$

то же кинетического крутящего момента (только от сил инерции):

$$\frac{M_{кин}}{m S^2 T^{-2}} = \frac{b_k c_k}{\varphi_y \eta_k} = \frac{d_k}{\varphi_y \eta_k}, \quad (12)$$

где  $d_k = b_k c_k$  — позиционный инвариант кинетической мощности

и  $\frac{d_k}{\varphi_y} = \frac{b_k c_k}{\varphi_y}$  кинетического крутящего момента для «идеального»

механизма (при  $\eta_k = 1$ ).

*Позиционный инвариант потерянной работы* определяется величиной:

$$e_k = \frac{A_{пот k}}{m S^2 T^{-2}}. \quad (13)$$

Этот инвариант может быть определен с учетом мгновенных к. п. д. механизма в виде:

$$e_{k_1} = \int_0^{k_1} \frac{(p_k + c_k) b_k}{\eta_k} dk - \int_0^{k_1} (p_k + c_k) b_k dk . \quad (14)$$

Если  $(p_k + c_k) b_k < 0$ , что возможно в период выбега механизма, когда  $c_k < 0$ , то для интервала значений относительного времени, где это неравенство имеет место, следует расчет величины доли инварианта  $e_{k_2}$  вести по формуле:

$$e_{k_2} = \int_{k_1}^{k_2} (p_k + c_k) b_k dk - \int_{k_1}^{k_2} (p_k + c_k) b_k \eta_k dk . \quad (15)$$

В последнем случае полный инвариант потерянной работы за цикл однозначных перемещений выразится величиной:

$$e_k = e_{k_1} + e_{k_2} . \quad (16)$$

Инвариант потерь на трение от чисто динамических нагрузок за кинематический цикл выражается величиной:

$$E = \frac{A_{\text{пот}}}{m S^2 T^2} = \int_0^{k_1} \frac{d_k}{\eta_k} dk + \int_{k_2}^1 \eta_k d_k dk , \quad (17)$$

где  $k_1$  — позиция окончания разбега, а  $k_2$  — начала выбега, при котором инварианты  $d_k$  отрицательны.

Суммарный коэффициент полезного действия в общем случае:

$$\eta_{\Sigma} = \frac{\int_0^1 u_k dk}{\int_0^{k_0} \frac{u_k}{\eta_k} dk + \int_{k_0}^1 \eta_k u_k dk} = \frac{\int_0^1 p_k b_k dk}{\int_0^{k_0} \frac{u_k}{\eta_k} dk + \int_{k_0}^1 \eta_k u_k dk} . \quad (18)$$

Как видим, при относительном анализе всех кинематических и динамических параметров механизмов возможно оперировать только соответствующими инвариантами с учетом механических и физических параметров подобия.

При выборе в качестве независимых модулей величин  $m$ ,  $\omega_1$ ,  $r$  (см. выше) аналогичные инварианты подобия могут быть выражены в виде:

перемещений:

$$s_{\text{ин}} = \frac{s_i}{r} ;$$

скоростей линейных:

$$v_{\text{ин}} = \frac{v_i}{\omega_1 r} ; \quad (19)$$

скоростей угловых:  $\omega_{in} = \frac{\omega_i}{\omega_1}$  ;

ускорений линейных:  $\omega_{in} = \frac{\omega_i}{\omega_1^2 r}$  ;

ускорений угловых:  $\varepsilon_{in} = \frac{\varepsilon_i}{\omega_1^2}$  ;

статических сил:  $P_{in} = \frac{P_i}{m \omega_1^2 r}$  ;

суммарных мощностей:  $N_{\Sigma in} = \frac{N_{\Sigma i}}{m \omega_1^3 r^2}$  ; (19)

кинетических мощностей:  $N_{кин in} = \frac{N_{кин i}}{m \omega_1^3 r^2}$  ;

суммарных крутящих моментов:  $M_{\Sigma in} = \frac{M_{\Sigma i}}{m \omega_1^2 r^2}$  ;

кинетических крутящих моментов:  $M_{кин in} = \frac{M_{кин i}}{m \omega_1^2 r^2}$

и т. д.

### Взаимосвязь между инвариантами подобия различных модульных систем

Из изложенного ранее следует, что инвариантами подобия одной и той же механической величины ( $A$ ) при различных независимых модулях измерения в общем случае являются:

$$q_{mST} = \frac{A}{m^\alpha S^\beta T^\gamma} ; \quad q_{m\omega_1 r} = \frac{A}{m^{\alpha_1} r^{\beta_1} \omega_1^{\gamma_1}} ;$$

$$q_{I\gamma_S T} = \frac{A}{I^{\alpha_2} \gamma_S^{\beta_2} T^{\gamma_2}} ; \quad q_{I\gamma_S \omega} = \frac{A}{I^{\alpha_3} \gamma_S^{\beta_3} \omega_1^{\gamma_3}} \quad \text{и т. д.}$$

Системы  $[m, S, T]$  и  $[I, \gamma_S, T]$  эквивалентны и все их соответственные инварианты подобия равны.

Действительно:

$$q_{mST} m^\alpha S^\beta T^\gamma = q_{I\gamma_S T} I^{\alpha_1} \gamma_S^{\beta_1} T^{\gamma_1} ; \quad (20)$$

выражая момент инерции масс в виде  $m l^2 = I$ , где  $m$  — масса, приведенная к некоторой точке качающегося звена, находящейся на расстоянии  $l$  от центра вращения, и учтя, что  $l \gamma_S = S$  — дуго-

вое перемещение точки приведения массы выразим (18) в виде:

$$q_{\text{мст}} m^\alpha S^\beta T^\gamma = q_{l_{\gamma_2 T}} m^{\alpha_1} (l_{\gamma_2})^\beta T^{\gamma_1}. \quad (21)$$

Так как размерность производных модулей для любой рассматриваемой механической величины является совершенно определенной, то очевидно, что в (21)  $\alpha = \alpha_1$  и  $\gamma = \gamma_1$ , а с учетом приведения системы к случаю периодического движения массы  $m$  по дуговой траектории, очевидно, что  $S^\beta = (l_{\gamma_2})^\beta$  и  $\beta = \beta_1$ . Следовательно  $q_{\text{мст}} = q_{l_{\gamma_2 T}}$ .

Аналогичным рассуждением можно показать, что:

$$q_{\text{м}\omega, r} = q_{l_{\omega_1 \gamma_2}}.$$

Что касается сопоставления инвариантов  $q_{\text{мст}}$  и  $q_{\text{м}\omega, r}$ , то здесь можно записать равенство:

$$q_{\text{мст}} m^\alpha S^\beta T^\gamma = q_{\text{м}\omega, r} m^{\alpha_1} r^{\beta_1} \omega_1^{\gamma_1},$$

откуда

$$q_{\text{мст}} = \frac{m^{\alpha_1} r^{\beta_1} \omega_1^{\gamma_1}}{m^\alpha S^\beta T^\gamma} q_{\text{м}\omega, r}.$$

Исходя из совпадения размерностей производных модулей в числителе и знаменателе, с учетом физической сути механической величины  $A$  (см. выше), заключаем:  $\alpha = \alpha_1$ ,  $\beta = \beta_1$  и  $\gamma = \frac{1}{\gamma_1}$  (т. к. размерность  $T$  — сек, а  $\omega_1 = \frac{1}{\text{сек}}$ ). Поэтому можно записать:

$$q_{\text{мст}} = \frac{q_{\text{м}\omega, r}}{\Pi^\beta \varphi_\gamma^{\gamma_1}}, \quad (22)$$

где  $\Pi = \frac{S}{r}$  и  $\varphi_\gamma = \omega_1 T$  — угол поворота главного вала за цикл рассматриваемого однозначного периодического перемещения ведомого звена, причем показатель степени  $\beta$  является показателем степени для  $S$ , а показатель степени  $\gamma$  — для  $T$ .

### Использование инвариантов подобия для качественной оценки механизмов

При изучении (анализе) и выборе (синтезе) исполнительных механизмов, используемых в машинах-автоматах, необходимо знать величины экстремальных значений важнейших механических характеристик соответствующих систем.

Если путем исследования определены экстремальные значения соответствующих инвариантов подобия интересующих

механических величин, то они являются константами, характеризующими качественную сторону всего множества систем; механически подобных исследованной системе (независимо от абсолютных величин, определяемых масштабом перехода  $[m^\alpha S^\beta T^\gamma]$ )

Если экстремальное значение некоторой механической величины ( $A$ ) для одной системы выразим в виде:

$$A_{1m} = Q_1 [m^\alpha S^\beta T^\gamma],$$

то при заданных  $m$ ,  $S$  и  $T$  для последующих систем, отличающихся от первой, мы соответственно найдем:

$$A_{m2} = Q_2 [m^\alpha S^\beta T^\gamma],$$

.....

$$A_{nm} = Q_n [m^\alpha S^\beta T^\gamma].$$

Для сопоставления влияния различных механических систем на величину интересующей механической характеристики  $A_{1m}$  достаточно сравнить их относительно:

$$A_{1m} : A_{2m} : \dots : A_{nm} = Q_1 : Q_2 : \dots : Q_n. \quad (23)$$

Таким образом, экстремальные значения соответствующих инвариантов дают объективное представление о качестве той или иной системы с необходимой точки зрения.

В качестве критериев качественной оценки механических систем в первую очередь используются следующие важнейшие экстремальные инварианты (константы):

пика скорости: 
$$B = \frac{v_m}{ST^{-1}} = [b_k]_{\max};$$

пика ускорений: 
$$C = \frac{\omega_m}{ST^{-2}} = [c_k]_{\max}; \quad (24)$$

пика кинетической мощности: 
$$D = \frac{N_{\text{кин } m}}{m S^2 T^{-3}} = [d_k]_{\max};$$

работы, потерянной за однозначный цикл перемещений:

$$E = \frac{A_{\text{пор}}}{m S^2 T^{-2}} = [e_k]_{\max};$$

пика суммарной мощности (при различных конкретных случаях относительного нагружения  $p_0(k)$ ):

$$U_i = [(p_k + c_k) b_k]_{\max} = [u_k]_{\max}$$

и др.

При постоянстве числа Ньютона ( $p$ ) и отсутствии точного значения  $U_p$  ( $U_i$  для этого случая) можно в первом приближении

считать:  $U_p \approx pB + D$ , что дает несколько преувеличенный результат.

Важность объективного сравнения этих величин для различных механизмов, отбираемых при синтезе машин-автоматов, неоспорима.

Сравнение соответствующих констант, накопленных в удобных справочных таблицах, даст возможность заменить субъективные методы проектирования машин-автоматов, с использованием пресловутой «инженерной интуиции», объективными методами углубленного синтеза.

### Геометрические свойства кинематических диаграмм

Взаимосвязь ряда перечисленных критериев качественной оценки механизмов с геометрией кинематических диаграмм освещена автором в ранее опубликованных работах [16], [17] и др.

Здесь отметим только некоторые найденные закономерности.

Если заданы произвольные «единичные» диаграммы ускорений (рис. 1-а) и кинетической мощности (рис. 1-б), причем

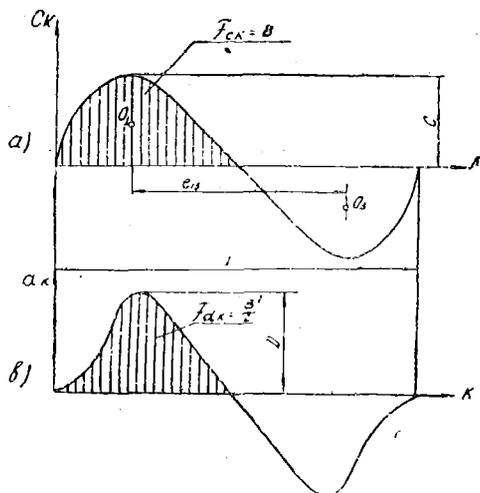


Рис. 1.

Схемы к определению геометрических свойств кинематических диаграмм.

$e_{13}$  — расстояние между центрами тяжести  $O_1$  и  $O_3$  фигур диаграмм однозначных ускорений, измеренное вдоль оси относительных времен в «единичном масштабе»;  $\gamma_{w1} = \frac{F_{ck}}{C_1} = \frac{B}{C_1}$

коэффициент заполнения фигурой диаграммы однозначных ускорений площади охватывающего ее прямоугольника  $(C_1 \cdot 1)$  со

сторонами, параллельными осям координат;  $\gamma_{к1}$  — соответствующий коэффициент заполнения для диаграммы кинетической мощности;  $\gamma_v$  — для диаграммы скоростей,

$$\text{то: } e_{13} = \gamma_v, \quad B = \frac{1}{e_{13}} = \frac{1}{\gamma_v}; \quad C = \frac{1}{e_{13} \gamma_{w1}};$$

$$D = \frac{1}{2e_{13}^2 \gamma_{к1}} = \frac{1}{2\gamma_v^2 \gamma_{к1}}.$$

Значения позиционных инвариантов и констант — критериев качественной оценки различных законов периодического движения — исследованы в едином плане в работах [16], [17] как для исходных, так и для комбинированных законов движения, применяемых при профилировании кулачков производственных машин-автоматов.

Отметим также, что для «единичной» диаграммы скоростей  $b_k(k)$  (рис. 2), нормаль  $n-n$ , проведенная через точку  $A$

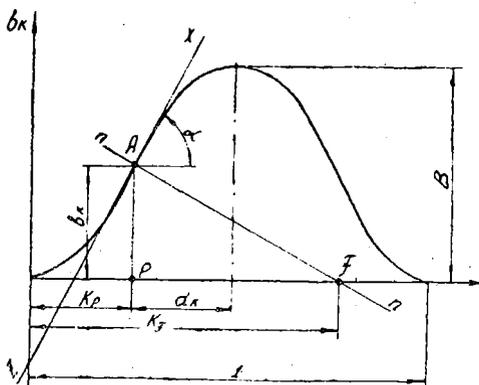


Рис. 2.  
Геометрические свойства «единичной» диаграммы скоростей.

к кривой диаграммы до пересечения с осью  $OK$ , определяет отрезок  $PF = k_F - k_A$ , который в масштабе диаграммы выражает инвариант кинетической мощности  $d_k = b_k c_k$ , т. к. отрезок  $PA$  выражает инвариант подобия скорости ( $b_k$ ), а отрезок  $PF = b_k \operatorname{tg} \alpha$ , где  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{db_k}{dk} = \dot{c}_k$  — позиционный инвариант подобия ускорений.

Найденные новые геометрические свойства диаграммы ускорений дали возможность построить карты классификации законов периодического движения по пикам скоростей и ускорений (« $e_{13} - e_{13} \gamma_w$ ») и по пикам скоростей и кинетической мощности « $e_{13} - 2 e_{13}^2 \gamma_{к1}$ ».

На этих картах в виде соответствующих лучей и кривых нанесены сетки геометрических мест, характеризующих изменение названных констант подобия при сокращении, асимметрии любых неоднородных законов периодического движения; указаны границы предельного размещения на картах точек, характеризующих симметричные и асимметричные законы периодического движения; нанесены все точки и поля, характеризующие исследованные законы движения; предложена методика любого синтеза комбинированных (неоднородных, сокращенных, асимметричных) законов периодического движения [17].

Подобные обобщения оказались возможными лишь при применении методов теории подобия и теории размерностей, лишь при выделении из исследуемых физических величин их инвариантов, отражающих закономерности изменений механических величин.

### Определение инвариантов подобия исходных плоских механизмов

Исходными плоскими механизмами назовем такие, которые образованы шарнирным присоединением какой-либо открытой кинематической группы Ассур с одним поводком к кривошипу с равномерным вращением, а остальными свободными шарнирами поводков к стойке.

Все остальные плоские механизмы будем относить к комбинированным.

В соответствии с общими свойствами инвариантов подобия будем определять их для «единичных» механизмов, распространяя выводы на все остальные механически подобные механизмы, отличающиеся от «единичного» лишь масштабом перехода.

Для конкретизации рассуждений рассмотрим механизм шарнирного четырехзвенника  $O_1ABO_2$  (рис. 3).

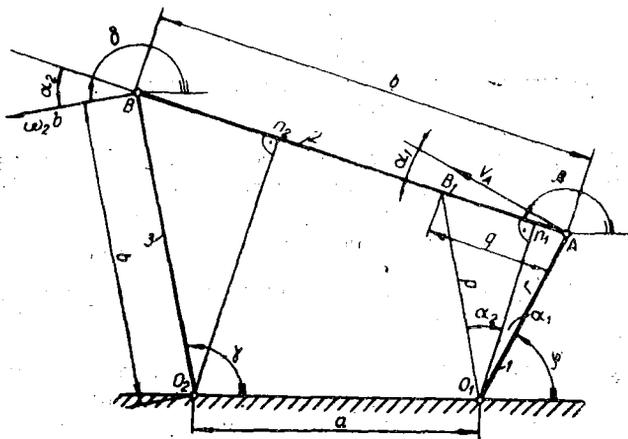


Рис. 3.

Кинематическая схема шарнирного четырехзвенника.

Проведя из точки  $O_1$  линию, параллельную  $O_2B$  до пересечения с направлением шатуна  $AB$  получаем повернутый на  $90^\circ$  план скоростей в виде треугольника  $O_1AB_1$ , где  $\overline{O_1A}$  изображает  $v_A$ ,  $\overline{AB_1} = \overline{v_{BAI}}$  и  $\overline{O_1B_1} = \overline{v_B}$ . Графически и аналитически определим инварианты скоростей:

$$v_{BAI} = \frac{v_{BA}}{v_A} = \frac{\overline{AB_1}}{\overline{O_1A}} = \frac{\sin(\gamma - \varphi)}{\sin(\beta - \gamma)} ;$$

$$v_{BI} = \frac{v_B}{v_A} = \frac{\overline{O_1B_1}}{\overline{O_1A}} = \frac{\sin(\beta - \varphi)}{\sin(\beta - \gamma)} . \quad (25)$$

Инварианты угловых скоростей:

$$\omega_{2II} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{v_{BA}}{l\omega_1} = \frac{v_{BAI} \omega_1 r}{l\omega_1} = \frac{v_{BAI}}{\lambda} = \frac{\overline{AB_1}}{\overline{AB}} ;$$

$$\omega_{3II} = \frac{\omega_3}{\omega_1} = \frac{v_B}{b\omega_1} = \frac{v_{BI} \omega_1 r}{b\omega_1} =$$

$$= \frac{v_{BI}}{\beta} = \frac{\overline{O_1B_1}}{\overline{O_2B}} = \frac{\overline{O_1n_1}}{\overline{O_2n_2}} , \quad (26)$$

где  $\lambda = \frac{l}{r}$  и  $\beta = \frac{b}{r}$  — геометрические параметры звеньев механизма.

Соответственно определяем инварианты нормальных ускорений:

$$\left. \begin{aligned} a_{BAI}^n &= \frac{a_{BA}^n}{\omega_1^2 r} = \frac{\omega_2^2 l}{\omega_1^2 r} = \omega_{2II}^2 \lambda = \omega_{2II} v_{BAI} ; \\ a_{BI}^n &= \frac{a_B^n}{\omega_1^2 r} = \frac{\omega_3^2 b}{\omega_1^2 r} = \omega_{3II}^2 \beta = \omega_{3II} v_{BI} ; \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

и далее из анализа плана ускорений или дифференцированием (25) определим инварианты тангенциальных ускорений:

$$a_{BAI}^t = \frac{a_{BA}^t}{\omega_1^2 r} = \frac{\overline{n_{BA} b}}{\overline{AO_1}} ;$$

$$\text{или: } a_{\text{ВИА}}^{\tau} = \frac{\cos(\varphi - \gamma) + a_{\text{ВИА}}^{\text{н}} \cos(\gamma - \beta) + a_{\text{ВИА}}^{\text{н}}}{\sin(\beta - \gamma)},$$

$$a_{\text{ВИА}}^{\tau} = \frac{a_{\text{В}}^{\tau}}{\omega_1^2 r} = \frac{\overline{n_{\text{В}} b}}{AO_1};$$

$$\text{или: } a_{\text{ВИА}}^{\tau} = - \frac{a_{\text{ВИА}}^{\text{н}} \cos(\gamma - \beta) + a_{\text{ВИА}}^{\text{н}} + \cos(\beta - \varphi)}{\sin(\beta - \gamma)}.$$

Инварианты угловых ускорений:

$$\varepsilon_{2\text{н}} = \frac{\varepsilon_2}{\omega_1^2} = \frac{a_{\text{ВА}}^{\tau}}{\omega_1^2 l} = \frac{a_{\text{ВИА}}^{\tau}}{\lambda} \quad (29)$$

$$\text{и } \varepsilon_{3\text{н}} = \frac{\varepsilon_3}{\omega_1^2} = \frac{a_{\text{В}}^{\tau}}{\omega_1^2 b} = \frac{a_{\text{ВИА}}^{\tau}}{\beta}.$$

Определение значений углов  $\beta$  и  $\gamma$ , как функций угла  $\varphi$ , может быть произведено как аналитически, так и графическим путем на основании обмера углов при аккуратной разметке положений механизма. В последнем случае следует для проверки результатов обмера углов вычертить до начала расчетов графики  $\beta(\varphi)$  и  $\gamma(\varphi)$ , которые должны дать плавные кривые. В случае выпадения отдельных точек необходимо проверить правильность измерения углов на сомнительных и смежных с ними позициях.

Подобный графоаналитический расчет значительно более точен, чем определение ускорений методом планов.

Аналогичным путем определяются инварианты и для других исходных механизмов.

Ниже приведены аналитические формулы инвариантов скоростей и ускорений некоторых наиболее распространенных исходных плоских механизмов.

**Кулисные механизмы с вращающимся ползуном (рис. 4).**

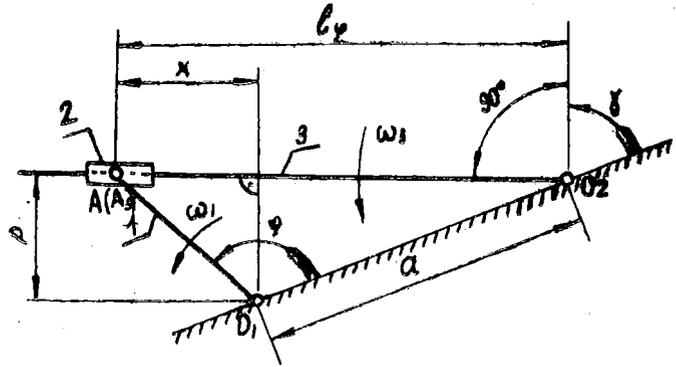


Рис. 4. Кинематическая схема кулисного механизма с вращающимся ползуном.

$$\gamma = \frac{\pi}{2} - \beta = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \left( \frac{\sin \varphi}{\lambda - \cos \varphi} \right);$$

$$v_{\Lambda 3 \text{ И}} = \frac{x}{r} = \sin(\varphi - \gamma);$$

$$v_{\Lambda 3 \text{ АИ}} = \frac{p}{r} = \cos(\varphi - \gamma);$$

$$\omega_{3 \text{ И}} = \frac{x}{l_{\varphi}} = \frac{\sin(\varphi - \gamma)}{\lambda \sin \gamma + \sin(\varphi - \gamma)};$$

$$\varepsilon_{3 \text{ И}} = \frac{p}{l_{\varphi}} \left( 1 - 2 \frac{x}{l_{\varphi}} \right) = \frac{(1 - 2\omega_{3 \text{ И}}) \cos(\varphi - \gamma)}{\sqrt{1 + \lambda^2 - 2\lambda \cos \varphi}},$$

$$\text{где } \lambda = \frac{a}{r}.$$

(30)

Мгновенный к. п. д. механизма

$$\eta_{\varphi} \approx \frac{\lambda_{\varphi} \omega_{3 \text{ И}}}{f_{\text{пр } 1} + (\lambda_{\varphi} + f_{\text{пр } 2}) \omega_{3 \text{ И}} + f_k v_{\Lambda 3 \text{ АИ}}},$$

где

$$\lambda_{\varphi} = \frac{l_{\varphi}}{r}; \quad \lambda = \frac{a}{r}; \quad f_{\text{пр } 1} = f_{01} \frac{r_{01}}{r} + f_A; \quad f_{\text{пр } 2} = f_{02} \frac{r_{02}}{r} - f_A \frac{r_A}{r}. \quad (31)$$

( $f_i$  — коэффициенты трения в соответственных кинематических парах).

Для кулисного механизма с качающимся ползуном значения инвариантов те же, что и для механизма с вращающимся ползуном, а мгновенный к. п. д. механизма:

$$\eta_k \approx \frac{1}{1 + \frac{\Phi}{l_{\varphi}} \left[ f_{02} r_{02} + f_A r_A \left( \frac{1}{\omega_{3 \text{ И}}} + 1 \right) + \frac{f_{01} r_{01}}{\omega_{3 \text{ И}}} \right] + 2 f_k v_{\Lambda 3 \text{ АИ}} \frac{r}{h}}, \quad (32)$$

где

$$\Phi \approx \sqrt{\frac{1 + 4 f_k^2 \left( \frac{l_{\varphi}}{h} \right)^2}{1 - 2 f_{02} \left( \frac{r_{02}}{l_{\varphi}} \right)}}$$

### Мальтийские механизмы

Закон скачкового однозначного углового перемещения с соответствующими паузами мальтийского креста определяется как для кулисного механизма с вращающимся ползуном (см. выше).

Из существующих мальтийских механизмов с внешним и внутренним зацеплением, в силу большей компактности и более благоприятного соотношения времени движения ко времени паузы, используемой для работы исполнительных механизмов, получили более широкое распространение внешние мальтийские механизмы (рис. 5). Их качественные характеристики (кон-

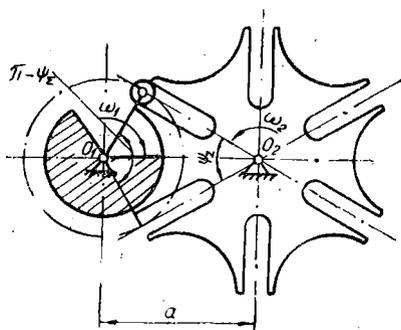


Рис. 5.

Кинематическая схема центрального внешнего мальтийского механизма.

станты *B*, *C* и *D* для сообщаемых законов движения) приведены в таблице 1.

Таблица 1.

Качественная характеристика центральных мальтийских внешних механизмов

Сравнительные величины	Число пазов креста					
	4	5	6	8	10	12
Геометрический параметр $\lambda = \frac{a}{r}$	1,4142	1,7013	2,000	2,6131	3,2363	3,8640
Отношение $\frac{\varphi_p}{2\pi} = \frac{T_p}{T}$	0,250	0,300	0,33(3)	0,375	0,400	0,41(6)
Угол поворота креста $\psi_2$	90°	72°	60°	45°	36°	30°
Угол поворота кривошипа $\varphi_p$ соответственно $\psi_2$	90°	108°	120°	135°	144°	150°
Инвариант пика угловой скорости креста $\omega_{2\max}$ и $= \frac{\omega_{2\max}}{\omega_1}$	2,414	1,426	1,000	0,620	0,447	0,349
Инвариант пика углового ускорения креста $\varepsilon_{2\max}$ и $= \frac{\varepsilon_{2\max}}{\omega_1^2}$	5,372	2,300	1,350	0,700	0,464	0,348

Сравнительные величины	Число пазов креста					
	4	5	6	8	10	12
Инвариант пика кинетической мощности $N_{кин\ max}$ $= \frac{N_{кин\ max}}{I\omega_1^3}$	10	2,52	1,00	0,31	0,14	0,08
Константа пика угловой скорости креста $B = \frac{\omega_2\ max}{\omega_2\ ср}$	2,414	2,139	2,000	1,860	1,788	1,745
Константа пика углового ускорения креста $C = \frac{\epsilon_2\ max}{\omega_1^2} \frac{\varphi_p^2}{\psi_\Sigma}$	8,44	6,50	5,65	4,95	4,66	4,55
Константа пика кинетической мощности $D = \frac{N_{кин\ max}}{I\omega_1^3} \frac{\varphi_p^3}{\psi_\Sigma^2}$	~15,7	~10,68	~8,86	~6,56	~5,62	~5,25

### Кривошипно-шатунные механизмы (рис. 6)

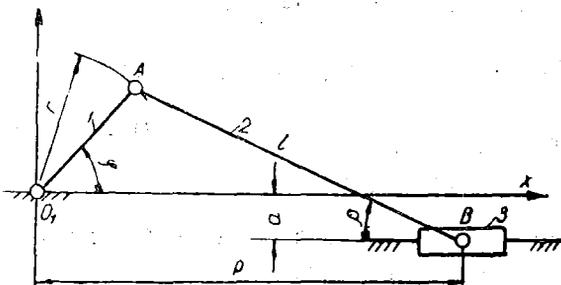


Рис. 6.

Кинематическая схема кривошипно-шатунного механизма.

$$\text{Угол наклона шатуна: } \beta = \arcsin\left(\frac{r \sin \varphi - a}{l_{ш}}\right) = \arcsin\left(\frac{\sin \varphi - \alpha}{\lambda}\right),$$

где  $\lambda = \frac{l_{ш}}{r}$  и  $\alpha = \frac{a^*}{r}$ ;

инварианты

перемещения ползуна:

$$s_{ш} = \frac{s}{r} = \sqrt{(\lambda + 1)^2 - \alpha^2} - \lambda \cos \beta - \cos \varphi; \quad (33)$$

скорости:

$$v_{ш} = \frac{\sin(\varphi + \beta)}{\cos \beta}; \quad v_{вап} = -\frac{\cos \varphi}{\cos \beta};$$

\* На рис. 6 отрезок  $a$  — отрицательный, т. к. отложен вниз.

угловые скорости шатуна:

$$\omega_{2н} = - \frac{\cos \varphi}{\lambda \cos \beta};$$

ускорения ползуна:

$$a_{вн} = \frac{a_{в}}{\omega_1^2 r} = \frac{\cos(\varphi + \beta) + \omega_{2н}^2 \lambda}{\cos \beta};$$

для шатуна:

$$a_{вАн}^{\tau} = \sin(\varphi + \beta) - a_{вн} \sin \beta;$$

$$\varepsilon_{2н} = \frac{\sin \varphi}{\lambda \cos \beta} - \omega_{2н}^2 \operatorname{tg} \beta;$$

к. п. д. механизма:

$$\eta_k = \frac{1 - f \operatorname{tg} \beta}{1 + \frac{f_{пр}}{\sin(\varphi + \beta)}} = \eta_n \eta_{вр}, \quad (34)$$

$$\text{где } f_{пр} = f_{в} \frac{r_{в}}{r} \omega_{2н} + f_{а} \frac{r_{а}}{r} (1 - \omega_{2н}) \pm f_{о1} \frac{r_{о1}}{r};$$

$\eta_n = 1 - f \operatorname{tg} \beta$  — к. п. д. поступательной пары;

$$\eta_{вр} = \frac{1}{1 + \frac{f_{пр}}{\sin[\varphi + \beta]}} \text{ — к. п. д. вращательных пар.}$$

Кривошипный механизм с поступательной кулисой (рис. 7)

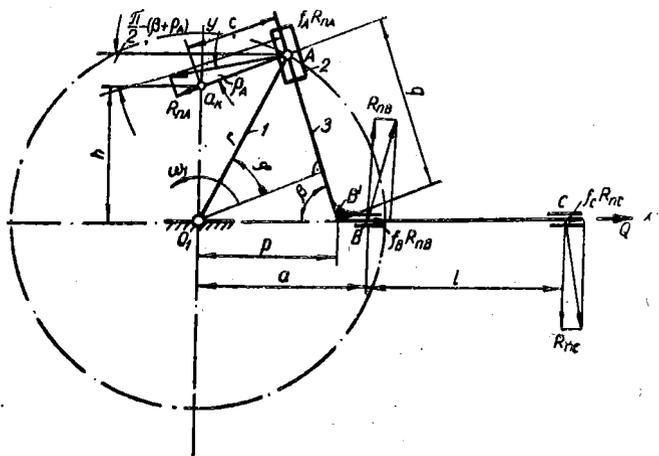


Рис. 7.

Кинематическая схема кривошипного механизма с поступательной кулисой.



Геометрический параметр — эксцентриситет шестерен:  $e = \frac{b}{2a}$ .

Угловое перемещение ведомой шестерни:

$$\Theta = \arcsin \cos \left( \frac{(1-e^2) \sin \varphi}{1-2e \cos \varphi + e^2} \right); \quad (38)$$

инвариант угловой скорости:

$$\omega_{2н} = - \frac{1-e^2}{1-2e \cos \varphi + e^2};$$

инвариант углового ускорения:

$$\varepsilon_{2н} = \frac{2e(1-e^2) \sin \varphi}{(1-2e \cos \varphi + e^2)^2}. \quad (39)$$

$$\omega_{2н \max} = - \frac{1+e}{1-e} \quad \text{и} \quad \omega_{2н \min} = - \frac{1-e}{1+e}.$$

$\varepsilon_{2н \max}$  и  $\varepsilon_{2н \min}$  в фазе цикла, определяемой углом поворота ведущей шестерни:

$$\varphi_3 = \arcsin \cos \left[ - \frac{1+e^2}{4e} + \sqrt{\left( \frac{1+e^2}{4e} \right)^2 + 2} \right].$$

Неполнозубые зубчатые колеса с эпициклоидальной кулисой включения (рис. 9) в период разбега

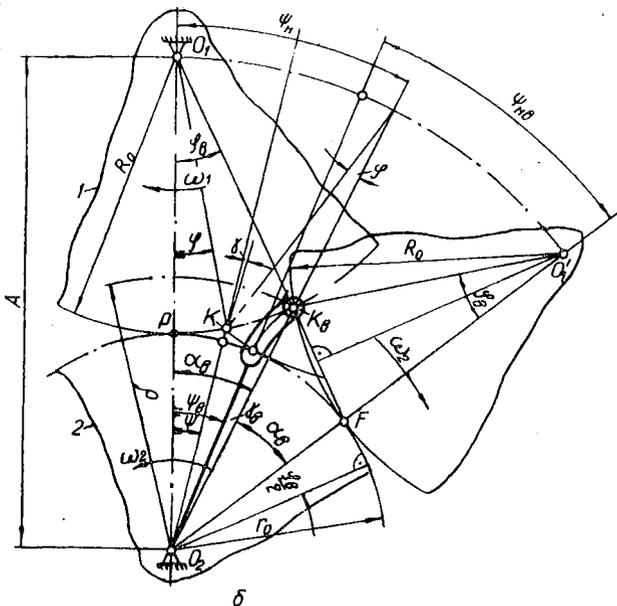


Рис. 9.

Кинематическая схема неполнозубых зубчатых колес с эпициклоидальной кулисой включения.

Передаточное число:  $i = \frac{r_0}{R_0}$ .

Инвариант радиуса-вектора эпициклоиды:

$$\varrho_{II} = \frac{\varrho}{R_0} = \sqrt{1 + A_0^2 - 2A_0 \cos \varphi}, \quad (40)$$

где  $A_0 = \frac{A}{r_0}$ .

$$\left. \begin{aligned} \omega_{2II} &= 2 \frac{\varrho_{II}^2 \cos \varphi - A_0 \sin^2 \varphi}{\varrho_{II}^2 \sqrt{\varrho_{II}^2 - \sin^2 \varphi}} - i; \\ \varepsilon_{2II} &= -2 \sin \varphi \frac{[\cos \varphi - \frac{A_0}{\varrho_{II}^2} \sin^2 \varphi] \left[ 2 \frac{A_0}{\varrho_{II}^2} + \frac{A_0 - \cos \varphi}{\varrho_{II}^2 - \sin^2 \varphi} \right] + 1}{\sqrt{\varrho_{II}^2 - \sin^2 \varphi}}. \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

### Кулачковые механизмы

Методика расчета кулачковых механизмов с использованием экстремальных и позиционных кинематических и динамических инвариантов подобия развита в книге автора «Комплексный расчет кулачковых механизмов» [17]. В приложениях к этой книге приведены таблицы позиционных инвариантов для ряда отобранных законов периодического движения, а в тексте — таблицы значений констант пиков скоростей, ускорений, кинетической мощности, суммарной мощности и др.

Использование этих констант дает возможность определить для плоских центральных кулачковых механизмов:

пик угла давления ( $\alpha_m$ ):

$$\alpha_m \approx \operatorname{arctg} \frac{B}{\varphi_y \left( \frac{r_0}{S} + 0,5 \right)}, \quad (42)$$

где  $B$  — инвариант подобия (константа) пика скорости толкателя (при исходных законах движения),  $r_0$  — начальный радиус эквидистантной кривой плоского кулачка,  $S$  — размах центрального поступательного толкателя,  $\varphi_y$  — угол поворота кулачка за цикл удаления;

минимальный радиус кривизны выпуклой части эквидистантной кривой кулачка:

$$\varrho_{\min} \approx \frac{0,92 \left( \frac{r_0}{S} + 1 \right)^2}{\frac{r_0}{S} + 1 + \frac{C}{\varphi_y^2}} S = \varrho_{\min II} S, \quad (43)$$

где  $C$  — инвариант подобия (константа) пика ускорений толкателя (при исходных законах периодического движения):

$$q_{\min} \approx 0,92 \frac{\left(\frac{r_0}{s} + 1\right)^2}{\frac{r_0}{s} + 1 + \frac{C}{\varphi_y^2}} \text{--- инвариант минимального радиуса кривизны;}$$

*пик суммарной мощности при постоянном статическом нагружении:*

$$N_{\Sigma \max} \approx [pB + D] \frac{m S^2}{T^3}, \text{ точнее } N_{\Sigma \max} = [(p + c_k) b_k]_{\max} \frac{m S^2}{T^3}, \quad (44)$$

где  $p = \frac{P_{ст}}{m S T^{-2}}$  — число Ньютона для статической силы  $P_{ст}$ ;

$B$  — константа пика скорости и  $D$  — константа пика кинетической мощности для закона движения толкателя:

$\frac{m S^2}{T^3}$  — модуль мощности (см. выше);

*пик суммарного крутящего момента на валу кривошипа (кулачка) при постоянном статическом нагружении:*

$$M_{\Sigma \max} = \frac{N_{\Sigma \max}}{\omega} \approx \frac{[pB + D]}{\varphi_y} \frac{m S^2}{T^2}. \quad (45)$$

### Инварианты подобия для переносного и относительного движения

Как известно, каждое плоское бесконечно малое сложное перемещение звена можно расчленить на два элементарных: *переносное* — поступательное, вдоль траектории точки звена с заданным движением и *относительное* — вращательное вокруг этой точки.

Ускорение точки во вращательном относительном движении принято, в свою очередь, расчленять на нормальную и касательную составляющие.

Характерно, что центростремительные (нормальные) и поворотные (кориолисовы) ускорения возникают только при наличии скоростей звеньев и отражают качественные изменения движения (отклонение концов соответствующих векторов наличной скорости от прежнего направления), в то время как тангенциальные составляющие отражают количественное изменение движения вдоль траектории и могут быть рассмотрены как начальные ускорения при отсутствии движения системы [10].

Такая интерпретация позволяет рассматривать любое неравномерное вращательное движение звеньев механизмов и машины,

в целом, состоящим как бы из двух движений: *переносного* (перманентного\*) с постоянной угловой скоростью, равной действительной мгновенной скорости ( $\omega_1$ ) вращения, но при отсутствии угловых ускорений ( $\varepsilon_1 = 0$ ) и *относительного* (начального\*) с угловым ускорением, равным действительному угловому ускорению ( $\varepsilon_1$ ), но при отсутствии угловой скорости ( $\omega_1 = 0$ ).

Так как при начальном движении  $\omega_1 = 0$ , то все нормальные и поворотные ускорения точек звеньев отсутствуют, а остаются только тангенциальные ускорения. В связи с этим планы ускорений механизма при  $\varepsilon_1 \neq 0$  и  $\omega_1 = 0$  здесь геометрически подобны соответственным планам скоростей при  $\omega_1 \neq 0$ .

Это следует и из математического анализа скоростей и ускорений точки ведомого звена:

позиционная скорость точки ведомого звена:

$$v_i = \frac{v_i}{\omega_n r} \omega_n r = v_{0in} \omega_n r, \quad (46)$$

где  $\omega_n$  — мгновенная угловая скорость неравномерного движения;

$v_{0in} = \frac{v_i}{\omega_n r} = \frac{v_{oi}}{\omega_1 r}$  — позиционный инвариант скорости, найденный при  $\varepsilon_1 = 0$ .

Ускорение этой же точки определяем дифференцированием (46):

$$w_i = \frac{dv_i}{dt} = \frac{dv_{0in}}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} \omega_n r + v_{0in} \frac{d\omega_n}{dt} r;$$

или после элементарных преобразований:

$$w_i = w_{0in} \omega_n^2 r + v_{0in} \varepsilon_{in} r = \omega_n^2 r [w_{0in} + v_{0in} \varepsilon_{in}]; \quad (47)$$

или  $w_i = \omega^n r w_{nin}$ ,

где  $w_{nin} = w_{0in} + v_{0in} \varepsilon_{in}$  — комплексный инвариант, а

$\varepsilon_{in} = \frac{\varepsilon_n}{\omega_n^2}$  — инвариант углового ускорения ведущего звена,

если движение его задано.

Таким образом, для составления комплексных позиционных инвариантов подобия при неравномерном движении ведущего звена возможно использовать позиционные инварианты подобия, найденные для случая равномерной угловой скорости ведущего звена.

Это существенно упрощает составление таблиц позиционных инвариантов подобия для различных исходных механизмов.

\* По Н. Е. Жуковскому.

Неравномерное движение ведущего звена может быть следствием как естественных, так и искусственно наложенных причин.

Естественными причинами являются:

а) неравномерность хода машины в силу пульсации потребления мощности при конечной массе (моменте инерции) маховика;

б) упругие крутильные колебания валов передаточных механизмов (трансмиссии);

в) наличие «игры» в кинематических сопряжениях звеньев;

г) неустановившееся движение машины.

Неравномерное движение ведущего звена может быть создано искусственно путем применения дополнительного циклового механизма (например, эллиптических шестерен в блокообработывающих агрегатах, двухкривошипных механизмов в однооборотных плоскочастных автоматах, полноповоротных кулисных механизмов в замедляющих устройствах самонакладов и т. п.).

### Комплексные инварианты подобия для звеньев комбинированных механизмов

Пусть задан произвольный шарнирный четырехзвенный механизм (рис. 10) с ведущим кривошипом  $O_1A$ , имеющим неравномерную угловую скорость  $\omega_1$  и угловые ускорения  $\epsilon_1$ , причем позиционные инварианты подобия движения звеньев четырехзвенника  $O_1ABO_2$  при  $\omega_1 = \text{const}$  известны.

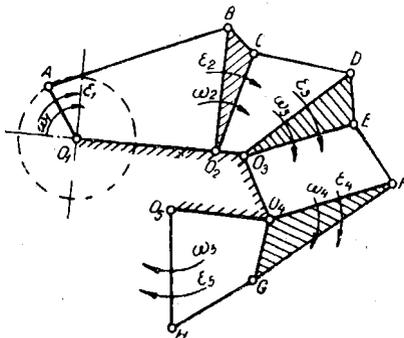


Рис. 10.

Схема комбинированного механизма с последовательно наложенными контурами.

Для коромысла  $O_2B$  при  $\omega_1 = \text{const}$ :

$$\omega_{20} = \omega_{21н} \cdot \omega_1 \quad \text{и} \quad \epsilon_{20} = \epsilon_{21н} \cdot \omega_1^2.$$

При  $\omega_1 \neq \text{const}$ , с учетом изложенного выше:

$$\omega_2 = \omega_{21н} \cdot \omega_1 \quad \text{и} \quad \epsilon_2 = \epsilon_{21н} \cdot \omega_1^2 + \omega_{21н} \cdot \epsilon_1,$$

где инварианты  $\omega_{21n} = \frac{\omega_{20}}{\omega_1}$  и  $\varepsilon_{21n} = \frac{\varepsilon_{20}}{\omega_1^2}$  выбираются из таблиц для случая  $\omega_1 = \text{const}$ .

При дальнейшем последовательном синтезе механизма путем развития коромысел и присоединения к ним кинематических групп второго порядка можем найти угловые скорости и угловые ускорения всех последующих ведомых звеньев наслаиваемых контуров:

$$\omega_3 = \omega_{32n} \cdot \omega_2; \quad \varepsilon_3 = \varepsilon_{32n} \cdot \omega_2^2 + \omega_{32n} \cdot \varepsilon_2;$$

$$\omega_4 = \omega_{43n} \cdot \omega_3; \quad \varepsilon_4 = \varepsilon_{43n} \cdot \omega_3^2 + \omega_{43n} \cdot \varepsilon_3;$$

⋮

и т. д.,

где  $\omega_{32n}, \omega_{43n}, \dots; \varepsilon_{32n}, \varepsilon_{43n}, \dots$  соответственные кинематические позиционные инварианты подобия, выбираемые для наслаиваемых контуров с учетом их положения для случая  $\omega_1 = \text{const}$ .

Подставляя последовательно все предыдущие значения угловых скоростей  $\omega_i$  и ускорений  $\varepsilon_i$  в последующие формулы, в общем случае для  $n$ -го звена, присоединенного последовательно к стойке, найдем:

$$\left. \begin{aligned} \omega_{n1n} &= \prod_{i=2}^n \omega_{n[i-1]n} = \omega_{21n} \cdot \omega_{32n} \cdot \dots \cdot \omega_{n[n-1]n}; \\ \varepsilon_{n1n} &= \sum_{i=1}^n \prod_{i=1}^{i-1} \omega_{i[i-1]n}^2 \cdot \varepsilon_{i[i-1]n} \cdot \prod_{i+1}^n \omega_{i[i-1]n}. \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

Так, например, для 6-го звена, присоединяемого к стойке при последовательном наслаивании днад первого вида, комплекс для  $\varepsilon_{61n}$  (48) приобретает форму:

$\varepsilon_{61n} = \varepsilon_{10n}$	1	2	3	4	5	6
	$\cdot \omega_{21n}$	$\cdot \omega_{32n}$	$\cdot \omega_{43n}$	$\cdot \omega_{54n}$	$\cdot \omega_{65n} +$	
+	$\varepsilon_{21n}$	$\cdot \omega_{32n}$	$\cdot \omega_{43n}$	$\cdot \omega_{54n}$	$\cdot \omega_{65n} +$	
+	$\omega_{21n}^2$	$\cdot \varepsilon_{32n}$	$\cdot \omega_{43n}$	$\cdot \omega_{54n}$	$\cdot \omega_{65n} +$	
+	$\omega_{21n}^3$	$\cdot \omega_{32n}^2$	$\cdot \varepsilon_{43n}$	$\cdot \omega_{54n}$	$\cdot \omega_{65n} +$	
+	$\omega_{21n}^4$	$\cdot \omega_{32n}^2$	$\cdot \omega_{43n}^2$	$\cdot \varepsilon_{54n}$	$\cdot \omega_{65n} +$	
+	$\omega_{21n}^5$	$\cdot \omega_{32n}^2$	$\cdot \omega_{43n}^2$	$\cdot \omega_{54n}^2$	$\cdot \varepsilon_{65n}$	

Угловыми линиями в этом сложном комплексе очерчено число множителей в строках и число строк, входящих слагаемыми в многочлен, в зависимости от порядка последовательно присоединяемых к стойке ведомых звеньев диад.

При синтезе механизмов, как ясно из анализа комплекса (49), можно влиять на закон периодического движения ведомого звена:

- а) выбором закона движения ведущего кривошипа  $O_1A$ ;
- б) выбором структуры, начальной фазы и геометрических параметров настраиваемых механизмов.

Развитие методики синтеза механизмов подобным путем имеет неисчерпаемые перспективы.

### Обобщенное уравнение движения машины

Если привести к определенному валу привода машины все статические и кинетические силы, то можно записать уравнение, вытекающее из закона сохранения энергии:

$$[M_{ссп} - M_{скп}] \omega_n = 0 \quad \text{или} \quad M_{ссп} - M_{скп} = 0, \quad (50)$$

где  $M_{ссп}$  — приведенный крутящий момент от статических сил, а  $M_{скп}$  — то же от кинетических сил;  $\omega_n$  — угловая скорость вала приведения.

Так как, приводя крутящие моменты от статических сил для отдельных частных механизмов, мы имеем уравнения вида:

$$M_{кр i} \omega_n \eta_i = P_i v_i \quad \text{или} \quad M_{кр i} = \frac{P_i r_o v_{i n}}{\eta_i},$$

а также

$$M_{кр j} \omega_n \eta_j = M_j \omega_j \quad \text{или} \quad M_{кр j} = \frac{M_j \omega_{j n}}{\eta_j},$$

то

$$M_{ссп} = M_{дв} - \sum_{i=1}^n \frac{P_i r_o v_{i n}}{\eta_i} - \sum_{j=1}^k \frac{M_j \omega_{j n}}{\eta_j}. \quad (51)$$

Соответственно, крутящие моменты для частных механизмов от кинетических сил можно выразить в виде:

$$M_{кр кин i} = \frac{P_{ин i} r_o v_{i n}}{\eta_i} = \frac{m_i \omega_i r_o v_{i n}}{\eta_i}$$

и

$$M_{кр кин j} = \frac{M_{ин j} \omega_{j n}}{\eta_j} = \frac{J_j \varepsilon_j \omega_{j n}}{\eta_j},$$

которые после подстановки ускорений с учетом расчленения

движения на переносное и относительное могут быть представлены в виде:

$$M_{\text{кр кин } i} = \frac{m_i r_0 \omega_i v_{i\text{н}}}{\eta_i} = \frac{m_i r_0^2}{\eta_i} \cdot \omega_{i\text{н}} \cdot v_{i\text{н}} \cdot \omega_n^2 + \frac{m_i r_0^2}{\eta_i} v_{i\text{н}}^2 \varepsilon_n,$$

и

$$M_{\text{кр кин } j} = \frac{I_j \cdot \varepsilon_j \cdot \omega_{j\text{н}}}{\eta_j} = \frac{I_j}{\eta_j} \varepsilon_{j\text{н}} \cdot \omega_{j\text{н}} \cdot \omega_n^2 + \frac{I_j}{\eta_j} \omega_{j\text{н}}^2 \varepsilon_n.$$

При этом общий приведенный крутящий момент от кинетических сил выразится в виде:

$$M_{\text{ск н}} = \left( \sum_{i=1}^n \frac{m_i r_0^2}{\eta_i} v_{i\text{н}} \omega_{i\text{н}} + \sum_{j=1}^k \frac{I_j}{\eta_j} \omega_{j\text{н}} \cdot \varepsilon_{j\text{н}} \right) \omega_n^2 + \left( \sum_{i=1}^n \frac{m_i r_0^2}{\eta_i} v_{i\text{н}}^2 + \sum_{j=1}^k \frac{I_j}{\eta_j} \omega_{j\text{н}}^2 \right) \varepsilon_n. \quad (52)$$

Второй многочлен в скобках выражает известный приведенный *кинетический* момент инерции масс:

$$I_n = \sum_{i=1}^n \frac{m_i r_0^2}{\eta_i} v_{i\text{н}}^2 + \sum_{j=1}^k \frac{I_j}{\eta_j} \omega_{j\text{н}}^2. \quad (53)$$

Первый же многочлен в скобках по сути также представляет приведенный момент инерции масс, который уместно назвать *кинетостатическим*:

$$I_{\text{нк}} = \sum_{i=1}^n \frac{m_i r_0^2}{\eta_i} N_{i\text{н}} + \sum_{j=1}^k \frac{I_j}{\eta_j} N_{j\text{н}}, \quad (54)$$

где  $N_{i\text{н}} = v_{i\text{н}} \omega_{i\text{н}}$  и  $N_{j\text{н}} = \omega_{j\text{н}} \varepsilon_{j\text{н}}$  — позиционные инварианты кинетической мощности, а  $\eta_i$  и  $\eta_j$  — мгновенные к. п. д. частных механизмов.

С учетом введенных обозначений и уравнений (50), (51), (53) и (54) обобщенное уравнение движения машины представляется в виде:

$$M_{\text{ссп}} = I_{\text{нк}} \cdot \omega_n^2 + I_n \cdot \varepsilon_n \quad (55)$$

Уравнение Лагранжа второго рода обычно выражается в виде:

$$M_{\text{ссп}} = I_n \varepsilon_n + \frac{1}{2} \frac{d I_n}{d \varphi} \omega_n^2. \quad (56)$$

Сравнивая (55) и (56) заметим, что

$$I_{пк} = \frac{1}{2} \frac{d I_{п}}{d \varphi},$$

в чем нетрудно убедиться, учтя, что

$$\frac{d I_{п}}{d \varphi} = 2 \left( \sum_{i=1}^n \frac{m_i r_{o^2}}{\eta_i} v_{iн} \omega_{iн} + \sum_{j=1}^k \frac{I_j}{\eta_j} \cdot \omega_{jн} \cdot \varepsilon_{jн} \right) = 2 I_{пк}.$$

Так как при определении  $I_{п}$  и  $I_{пк}$  используются инварианты, найденные для случая  $\omega_1 = \text{const}$ , которые остаются в силе для каждой позиции машины и при  $\omega_1 \neq \text{const}$ , то с учетом заданных статических сил и положений отдельных механизмов можно определить для каждой фазы движения истинные  $\omega_{п}$  и  $\varepsilon_{п}$ .

Задавая главному валу пределы колебания угловой скорости в виде:

$$\omega_{п \max} \approx \omega_{ср} \left( 1 + \frac{\delta}{2} \right) \quad \text{и} \quad \omega_{п \min} \approx \omega_{ср} \left( 1 - \frac{\delta}{2} \right),$$

где  $\delta = \frac{\omega_{\max} - \omega_{\min}}{\omega_{ср}}$  — заданный коэффициент неравномерности хода машины, строим диаграммы  $M_{ссп}[\varphi]$ ,  $I_{пк} \omega_{п \max}^2$  и  $I_{пк} \omega_{п \min}^2$ ; пересечения первой диаграммы со второй и первой с третьей определяют фазы соответствующих экстремумов скоростей, легко определяемых логическим анализом.

Определив угол (фазу), соответствующий минимальной угловой скорости главного вала ( $\varphi_{\min}$ ), планиметрированием или аналитическим приближенным интегрированием определяем работу статических сил на некотором интервале:

$$A_{с(\varphi - \varphi_{\min})} = \int_{\varphi_{\min}}^{\varphi} M_{ссп} d\varphi = \frac{I_{п\varphi} \omega_{п\varphi}^2 - I_{п \min} \omega_{п \min}^2}{2},$$

откуда

$$\omega_{п\varphi} = \sqrt{\frac{2A_{с(\varphi - \varphi_{\min})} + I_{п \min} \omega_{п \min}^2}{I_{п\varphi}}}, \quad (57)$$

где  $I_{п\varphi}$  и  $\omega_{п\varphi}$  — текущие значения  $I_{п}$  и  $\omega_{п}$ .

Зная  $\omega_{п\varphi}$  с помощью формулы (55) определяем истинное угловое ускорение вала приведения ( $\varepsilon_{п\varphi}$ ):

$$\varepsilon_{п\varphi} = \frac{M_{ссп\varphi} - I_{п\varphi} \omega_{п\varphi}^2}{I_{п\varphi}}. \quad (58)$$

## Использование инвариантов подобия при выборе оптимального соотношения продолжительности циклов рабочего и холостого ходов главного исполнительного органа машины-автомата

Для исполнительных механизмов периодического движения, имеющих существенные статические нагрузки при рабочем ходе и почти чисто кинетические — при холостом ходе, целесообразно исходить при синтезе из условия выравнивания пиков потребляемой мощности. В этом случае предельно сокращаются нагрузки, передаваемые кинематической цепью звеньев трансмиссии приводного устройства (валы, шестерни, шпонки, муфты и т. п.).

Решение задачи в общем виде может быть рационализировано при использовании экстремальных констант кинематических и динамических расчетных параметров.

Продолжительность полного кинематического цикла ( $T$ ) может быть представлена в виде:

$$T = T_p + T_x = T_p \left( 1 + \frac{T_x}{T_p} \right) = T_p (1 + \Theta), \quad (59)$$

где  $T_p$  — продолжительность рабочего хода;

$T_x$  — продолжительность холостого хода;

$\Theta = \frac{T_x}{T_p}$  — варьируемый относительный параметр, представляющий искомую величину.

Из формулы (59) следует:

$$T_p = \frac{T}{1 + \Theta} \quad \text{и} \quad T_x = \frac{\Theta T}{1 + \Theta}. \quad (60)$$

Если при рабочем ходе преодолевается общее постоянное статическое сопротивление движению  $P_p$ , а при холостом ходе, соответственно,  $P_x$ , то инвариантами статических сил является: при рабочем ходе:

$$p_p = \frac{P_{ст p}}{m S T_p^{-2}} = \frac{P_{ст p} T^2}{m S (1 + \Theta)^2} = \frac{p_{p0}}{[1 + \Theta]^2}; \quad (61)$$

при холостом ходе:

$$p_x = \frac{P_{ст x}}{m S T_x^{-2}} = \frac{P_{ст x} \Theta^2 T^2}{m S [1 + \Theta]^2} = \frac{\Theta^2 p_{x0}}{[1 + \Theta]^2},$$

где  $p_{p0} = \frac{P_{ст p}}{m S T^{-2}}$  и  $p_{x0} = \frac{P_{ст x}}{m S T^{-2}}$  — известны.

Для случаев постоянства статической силы на протяжении цикла однозначных перемещений пик потребляемой мощности может быть приближенно определен [17]:

при рабочем ходе:

$$N_{pm} \approx [p_p B_p + D_p] \frac{m S^2}{\eta_p T_p^3} \approx [p_p B_p + D_p] \frac{m S^2}{\eta_p T_p^3} [1 + \Theta]^3; \quad (62)$$

при холостом ходе:

$$N_{xm} \approx [p_x B_x + D_x] \frac{m S^2}{\eta_x T_x^3} \approx [p_x B_x + D_x] \frac{m S^2}{\eta_x T_x^3} \frac{[1 + \Theta]^3}{\Theta^3}.$$

Следовательно, условие выравнивания пиков мощности при рабочем и холостом ходах, с учетом (62), может быть приближенно выражено формулой:

$$\left[ \frac{p_{p0}}{[1 + \Theta]^2} B_p + D_p \right] \frac{[1 + \Theta]^3}{\eta_p} = \left[ \frac{\Theta^2 p_{x0}}{[1 + \Theta]^2} B_x + D_x \right] \frac{[1 + \Theta]^3}{\eta_x \Theta^3}, \quad (63)$$

где  $\eta_p$  и  $\eta_x$  — соответствующие к. п. д. механизма при рабочем и холостом ходах.

Для решения этой формулы относительно искомого относительного параметра  $\Theta = \frac{T_x}{T_p}$  после элементарных преобразований приводим ее к виду:

$$\Theta^5 + 2\Theta^4 + \left( 1 + p_{p0} \frac{B_p}{D_p} \right) \Theta^3 - \left( p_{x0} \frac{B_x}{D_r} + \frac{D_x}{D_r} \right) \Theta^2 - 2 \frac{D_x}{D_r} \Theta - \frac{D_x}{D_r} = 0. \quad (64)$$

Оценка констант пиков скорости и кинетической мощности при рабочем и холостом ходах  $B_p$ ,  $D_p$ ,  $B_x$  и  $D_x$  производится по соответствующим таблицам, с учетом выбора рациональных законов периодического движения, в зависимости от величин  $p_{p0}$  и  $p_{x0}$  [17]. Уравнение (64) проще всего решать графическими способами: подсчитав коэффициенты при  $\Theta^3$  и  $\Theta^2$ , даем относительному параметру  $\Theta$  ряд значений 0; 0,2; 0,4; 0,6; 0,8; 1 и строим кривую  $S_2(\Theta)$ , где  $S_2$  — сумма членов многочлена (64).

Точка пересечения кривой  $S_2(\Theta)$  с осью абсцисс ( $\Theta$ ) определяет решение, которое должно быть уточнено подсчетом  $S_2(\Theta)$  при ряде значений  $\Theta$ , близких к ожидаемому решению, найденному при первом укрупненном подсчете.

Так для ползунов поперечно-строгальных станков (шепингов) формула (64) дает из условия выравнивания пиков мощности решение:  $\Theta = 0,35 - 0,5$ , а для талеров плоскопечатных машин  $\Theta = 0,9 - 0,95$ .

## Использование инвариантов подобия при оценке ошибки положения механизма, как функции первичных ошибок и фазы цикла

Как показал Н. Г. Бруевич [8], общая ошибка положения ведомого звена ( $\Delta p$ ) в каждой фазе цикла может быть выражена как сумма частных ошибок ( $\Delta p_i$ ), возникающих в результате первичных ошибок, т. е. действительных отклонений координатных размеров звеньев от номиналов. Выражая каждую первичную ошибку в виде приращения соответствующего размера ( $\Delta r$ ,  $\Delta l$ ,  $\Delta a$  и т. д., см. рис. 11) и полагая, что каждое приращение

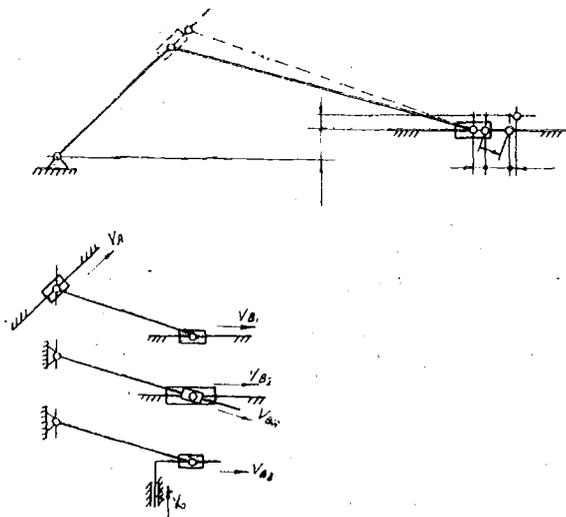


Рис. 11.

Схема к определению общей ошибки положения ведомого звена.

происходит в результате соответствующего смещения точки (центра шарнира и т. п.) вдоль звена, можем записать:

$$\begin{aligned} \Delta r &= V_{\Delta r} dt & \text{и} & & \Delta p_r &= V_{Br} dt ; \\ \Delta l &= V_{\Delta l} dt & \text{и} & & \Delta p_l &= V_{Bl} dt ; \\ \Delta a &= V_{\Delta a} dt & \text{и} & & \Delta p_a &= V_{Ba} dt \end{aligned}$$

и т. д.

Из этих равенств, в соответствии с общим принципом возможных перемещений, можно записать:

$$\frac{\Delta p_r}{\Delta r} = \frac{V_{Br}}{V_{\Delta r}} = V_{BrH} ; \quad \frac{\Delta p_l}{\Delta l} = \frac{V_{Bl}}{V_{\Delta l}} = V_{BlH} ; \quad \frac{\Delta p_a}{\Delta a} = \frac{V_{Ba}}{V_{\Delta a}} = V_{BaH} , \quad (65)$$

где  $V_{вгн} = \frac{V_{вр}}{V_{\Delta r}}$ ;  $V_{вгн} = \frac{V_{вг}}{V_{\Delta l}}$  и  $V_{ван} = \frac{V_{ва}}{V_{\Delta a}}$  — соответствующие позиционные инварианты подобия скоростей, определяемые графически или аналитически из планов скоростей заменяющих механизмов (рис. 11).

С учетом общих положений теории точности [8]: общая ошибка положения механизма ( $\Delta p$ ):  $\Delta p = \Delta p_r + \Delta p_l + \Delta p_a$ ;

подставляя в эту формулу вместо частных ошибок положения их выражения через первичные ошибки, найдем:

$$\Delta p = \Delta r V_{вгн} + \Delta l V_{вгн} + \Delta a V_{ван} . \quad (66)$$

Таким образом, инварианты подобия скоростей заменяющих механизмов могут быть использованы и для оценки ошибок положения механизмов.

## ВЫВОДЫ

1. Использование инвариантов подобия в виде предвычисленных таблиц рационализирует расчеты, а качественная оценка механизмов, путем определения кинематических и динамических констант подобия дает возможность объективно всесторонне сравнивать множества механизмов при выборе наиболее продуманного варианта решения (при синтезе машин-автоматов).

2. Накопление таблиц инвариантов подобия является неизбежным следствием развития теории механизмов и машин.

Задача заключается в организации систематической работы по вычислению таблиц и их изданию для широкого пользования в конструкторских бюро и для научно-исследовательских целей, применительно к реальным запросам промышленности. Такая работа под силу только головным научно-исследовательским институтам страны, которые могут кооперировать и усилия отраслевых научно-исследовательских институтов и соответствующих кафедр вузов по необходимым параметрическим исследованиям механизмов.

3. Применение метода инвариантов подобия дает возможность производить углубленные расчеты механизмов и машин точными аналитическими методами значительно скорее, чем ныне, особенно при использовании специальных арифметических машин и перфокарт, содержащих соответственно кодированные значения позиционных кинематических и динамических инвариантов для определенных геометрических параметров механизмов той или иной схемы.

Даже с использованием только логарифмической линейки студенты-дипломанты УПИ при использовании предвычисленных таблиц инвариантов кривошипно-шатунных, кулачковых, мальтийских механизмов, эллиптических зубчатых колес и неполно-

зубых колес с эпициклическим кулисным механизмом включения успевают точно рассчитать приводы сложных машин-автоматов, охватывая расчетом до 10—15 механизмов. При графических расчетах об этом не могло быть и речи, с учетом бюджета рабочего времени, отводимого на дипломное проектирование полиграфических машин.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Артоболевский И. И. Теория механизмов и машин, ГИТТЛ, 1952.
2. Артоболевский И. И., Левитский Н. И., Черкудинов С. А. Синтез плоских механизмов, Физматгиз, 1959.
3. Артоболевский С. И. Машинно-автоматы, Машгиз, 1949.
4. Ассур Л. В. Исследование плоских стержневых механизмов с низшими парами с точки зрения их структуры и классификации, Петроград, 1915.
5. Атлас по расчету кривошипно-шатунных механизмов, АН СССР, 1942.
6. Бежанов Б. Н. и Бушунов В. Т. Производственные машины-автоматы Машгиз, 1953.
7. Бордюг А. И. Методы теории подобия и теории размерностей при расчете кривошипно-шатунных механизмов, Автореферат кандидатской диссертации, изд. Львовского политехнического института, 1957.
8. Бруевич Н. Г. Точность механизмов, 1946.
9. Герасимов Ю. Н. Обобщенная теория дезаксиальных и радиальных мальтийских механизмов, Труды семинара по ТММ, изд. АН СССР, т. IV, вып. 15, 1948.
10. Жуковский Н. Е. Динамические задачи о кинематической цепи, Собрание сочинений, т. III, ГИТТЛ, 1949.
11. Зиновьев В. А. Аналитические методы расчета плоских механизмов, Гостехиздат, 1949.
12. Кирпичев М. В. Теория подобия, АН СССР, 1953.
13. Колчин Н. И. Механика машин, т. V, Машгиз, 1957.
14. Нахапетян Е. Г. Исследование динамики правильных мальтийских механизмов станков-автоматов, Труды семинара по ТММ, т. XIV, вып. 53, 1953.
15. Седов Л. Метод теории размерностей и теории подобия в механике, Гостехиздат, 1933.
16. Тир К. В. К вопросу о рациональном профилировании кулачков полиграфических машин, Автореферат кандидатской диссертации, изд. МПИ, 1952.
17. Тир К. В. Комплексный расчет кулачковых механизмов, Машгиз, 1958.
18. Тир К. В. Приближенный аналитический расчет механизмов привода машин-автоматов, т. XII «Научных записок», УПИ, 1958.
19. Шаумян Г. А. Автоматы, Машгиз, 1952.