

Н. М. Пирч

Українська академія друкарства

A-ЕКВІВАЛЕНТНІСТЬ НЕСЮР'ЕКТИВНИХ ВІДОБРАЖЕНЬ

Подано метод зведення ізоморфної класифікації гомоморфних продовжень несюр'єктивних відображень тихоновських просторів до ізоморфної класифікації гомоморфних продовжень сюр'єктивних відображень тихоновських просторів.

Для тихоновського простору X через $A(X)$ позначатимемо вільну абелеву топологічну групу простору X . Топологічні простори X і Y називаються A -еквівалентними, якщо топологічні групи $A(X)$ і $A(Y)$ є топологічно ізоморфними. Для неперервного відображення $f: X \rightarrow Y$ через $f^*: A(X) \rightarrow A(Y)$ будемо позначати продовження відображення f до гомоморфізму вільних абелевих топологічних груп. Неперервні відображення $f_1: X_1 \rightarrow Y_1$ і $f_2: X_2 \rightarrow Y_2$ іменуються A -еквівалентними, якщо існують ізоморфізми $i: A(X_1) \rightarrow A(X_2)$ і $j: A(Y_1) \rightarrow A(Y_2)$ такі, що $f_1^* \circ i = j \circ f_2^*$. Для топологічного простору X і його підпростору Y через $G(X; Y)$ будемо позначати підгрупу топологічної групи $A(X)$, породжену множиною твірних Y . Під парою топологічних X, Y просторів розумітимемо топологічний простір X і його підпростір Y . Пара топологічних просторів X, Y_1 називається A -еквівалентною парі топологічних просторів X_2, Y_2 , якщо існує ізоморфізм $i: A(X_1) \rightarrow A(X_2)$ такий, що $i(G(X_1, Y_1)) = G(X_2, Y_2)$.

Нагадаємо встановлені теореми [див. : Пирч Н. М. Еквівалентність за Марковим просторів і відображень : дис... канд. фіз.-мат. наук : 01.01.06 / Пирч Назар Михайлович. — Львів, 2007. — 159 с.].

Теорема 1. Нехай X_1, X_2 — тихоновські простори, Y_1, Y_2 — їхні замкнені підпростори. То пари (X_1, Y_1) і (X_2, Y_2) є A -еквівалентними тоді і тільки тоді, коли R -факторні відображення $q_1: X_1 \rightarrow X_1/Y_1$ і $q_2: X_2 \rightarrow X_2/Y_2$ A -еквівалентні.

Теорема 2. Нехай X_1, X_2 — тихоновські простори; $r_1: X_1 \rightarrow X_1/Y_1$ і $r_2: X_2 \rightarrow X_2/Y_2$ — їхні ретракції. За таких обставин наступні умови є еквівалентними:

- 1) ретракції r_1 і r_2 є A -еквівалентними відображеннями;
- 2) R -факторні відображення $q_1: X_1 \rightarrow X_1/Y_1$ і $q_2: X_2 \rightarrow X_2/Y_2$ є A -еквівалентними;
- 3) вкладення $t_1: Y_1 \rightarrow X_1$ і $t_2: Y_2 \rightarrow X_2$ є A -еквівалентними відображеннями;
- 4) пари (X_1, Y_1) і (X_2, Y_2) є A -еквівалентними;
- 5) $K_1 \overset{A}{\sim} K_2$ і $X_1 / K_1 \overset{A}{\sim} X_2 / K_2$.

Підпростір Y топологічного простору X іменується G_A -ретрактом простору X , якщо кожне неперервне відображення $f: Y \rightarrow G$ з топологічного

простору Y в абелеву топологічну групу G неперервно продовжується на X . Нагадаємо, що підпростір Y тихоновського простору $X \in G_A$ -ретрактом простору X тоді і лише тоді, коли існує гомоморфізм $h: A(X) \rightarrow A(Y)$ такий, що $h(y) = y$ для всіх $y \in Y$. Якщо підпростір $Y \in G_A$ -ретрактом тихоновського простору X , то підгрупа топологічної групи $A(X)$ породжена множиною твірних Y , є топологічно ізоморфною вільній абелевій топологічній групі $A(Y)$.

Теорема 3. Нехай $f_i: X_i \rightarrow Y_i$ та $i=1, 2 \in A$ -еквівалентними відображеннями, такими, що підпростори $f_i(X_i) \in G_A$ -ретрактами в Y_i . То $f_1 \sim^A f_2$ тоді і тільки тоді, коли $g_1 \sim^A g_2$ і $Y_1 / f_1(X_1) \sim^A Y_2 / f_2(X_2)$, де g_i — відображення $f_i: X_i \rightarrow f_i(X_i)$.

Доведення. Необхідність. Нехай $f_1 \sim^A f_2$, $i: A(X_1) \rightarrow A(X_2)$ та $j: A(Y_1) \rightarrow A(Y_2)$ — ізоморфізми, такі, що $f_1^* \circ i = j \circ f_2^*$. Прийнемо $Z_i = f_i(X_i)$. Оскільки підпростори $Z_i \in G_A$ -ретрактами в Y_i , то звуження ізоморфізму j на підгрупу $G(Y_1, Z_1)$ можемо розглядати як ізоморфізм $j: A(Z_1) \rightarrow A(Z_2)$, причому існує рівність $g_1^* \circ i = j \circ g_2^*$; отже, відображення g_1 і $g_2 \in A$ -еквівалентними. Припустимо $z_1 \in Z_1$, тоді існує $x_1 \in X_1$ таке, що $f_1(x_1) = z_1$. У такому разі $j(z_1) = f_2^*(i(x_1)) \in G(Y_2, Z_2)$. Тобто $j(Z_1) \subseteq G(Y_2, Z_2)$. Аналогічно перевіряється, що $j^{-1}(Z_2) \subseteq G(Y_1, Z_1)$. Тобто пари (Y_1, Z_1) і $(Y_2, Z_2) \in A$ -еквівалентними. Отже, за теоремою 1 $Y_1 / Z_1 \sim^A Y_2 / Z_2$.

Достатність. Нехай $g_1 \sim^A g_2$, $z_i \in Z_i$ — довільні точки. Як було встановлено, існують топологічні ізоморфізми $l: A(X_1) \rightarrow A(X_2)$ і $j: A(Z_1) \rightarrow A(Z_2)$ — ізоморфізми такі, що $f_1^* \circ l = j \circ f_2^*$ і $j(z_1) = z_2$. З того, що $Y_1 / Z_1 \sim^A Y_2 / Z_2$ випливає наступне: існує топологічний ізоморфізм $j_1: A(Y_1 / Z_1) \rightarrow A(Y_2 / Z_2)$ такий, що $j(k_1) = k_2$ для деяких $k_i \in Y_i / Z_i$. Розглянемо букети топологічних просторів $Z_i \vee Y_i / Z_i = (Z_i \oplus Y_i / Z_i) / (z_i, k_i)$ і відображення $s: Z_1 \vee Y_1 / Z_1 \rightarrow A(Z_2 \vee Y_2 / Z_2)$, означене як $s(x) = j(x)$, коли $x \in Z_1$ і $s(x) = j_1(x)$, якщо $x \in Y_1 / Z_1$. Продовження відображення s до гомоморфізму вільних абелевих топологічних груп $j_2: A(Z_1 \vee Y_1 / Z_1) \rightarrow A(Z_2 \vee Y_2 / Z_2)$ є топологічним ізоморфізмом [див. там само]. Нехай $h_i: X_i \rightarrow Z_i \vee Y_i / Z_i$ — відображення такі, що $h_i(x) = g_i(x)$ для всіх $x \in X_i$, $h_i^*: A(X_i) \rightarrow A(Z_i \vee Y_i / Z_i)$ — гомоморфні продовження відображень h_i . Припустимо, $x \in X_1$, то $j_2 \circ h_1(x) = j_2 \circ g_1(x) = j \circ g_1(x) = g_2^* \circ l(x) = h_2^* \circ l(x)$. Отже, $h_2^* \circ l = j \circ h_1^*$. Тобто відображення h_1 і $h_2 \in A$ -еквівалентними. Тому для доведення теореми залишається показати, що $h_i \sim^A f_i$ при $i=1, 2$.

Оскільки підпростір $Z_i \in G_A$ -ретрактами в Y_i , то існує гомоморфізм $\rho_i: A(Y_i) \rightarrow A(Z_i)$ такий, що $\rho_i(z) = z$ для всіх $z \in Z_i$. Зафіксуємо гомеоморфізм $\tau_i: Z_i \rightarrow Z_i'$ і його продовження до гомоморфізму вільних

абелевих топологічних груп $\tau_i^* : A(Z_i) \rightarrow A(Z_i')$. Припустимо, що $b_i \in Z_i$. Розглянемо фактор-простір $Y_i \vee Z_i' \rightarrow (Y_i \oplus Z_i') / (b_i, t_i(b_i))$ і відображення $v_i : Y_i \vee Z_i' \rightarrow A(Z_i)$, означене як $v_i(x) = \rho_i(x)$, якщо $x \in Y_i$ і $v_i(x) = \tau_i^{-1}(x)$, коли $x \in Z_i$. Продовжимо відображення $v_i(x)$ до гомоморфізму вільних абелевих топологічних груп $v_i^* : A(Z_i \vee Y_i) \rightarrow A(Z_i)$. Нехай $x \in Z_i$, тоді $v_i^*(x) = v_i(x) = \rho_i(x) = x$, тобто $v_i^* \circ \nu_i^* = \nu_i^*$. Розглянемо відображення $\omega_i : Z_i \vee Y_i \rightarrow A(Z_i')$, прийнявши $\omega_i(x) = \tau_i^* \circ v_i(x)$. Нехай $x \in Z_i'$, то $\omega_i(x) = \tau_i^* \circ v_i(x) = \tau_i^* \circ \tau_i^{-1}(x) = x$; отже, $\omega_i^* \circ \omega_i^* = \omega_i^*$. Окрім того, $\omega_i \circ v_i = \tau_i^* \circ v_i \circ v_i = \tau_i^* \circ v_i = \omega_i$ і $v_i \circ \omega_i = \tau_i^* \circ \omega_i \circ \omega_i = \tau_i^* \circ \omega_i = v_i$.

Розглянемо відображення $\eta_i : Y_i \vee Z_i' \rightarrow A(Y_i \vee Z_i')$, означене як $\eta_i(x) = v_i(x) - x + \omega_i(x)$. Продовжимо відображення η_i до гомоморфізму вільних абелевих топологічних груп $\eta_i^* : A(Y_i \vee Z_i') \rightarrow A(Y_i \vee Z_i')$. Тоді $\eta_i^* \circ \eta_i(x) = v_i^*(v_i(x) - x + \omega_i(x)) - (v_i(x) - x + \omega_i(x)) + \omega_i^*(v_i(x) - x + \omega_i(x)) = v_i \circ v_i(x) - v_i(x) + v_i \circ \omega_i(x) - v_i(x) + x - \omega_i(x) + \omega_i \circ v_i(x) - \omega_i(x) + \omega_i \circ \omega_i(x) = v_i(x) - v_i(x) + v_i(x) - v_i(x) + x - \omega_i(x) + \omega_i(x) - \omega_i(x) + \omega_i(x) = x$.

Отже, відображення η_i^* є топологічним ізоморфізмом.

Позначимо через $p_i : Y_i \vee Z_i' \rightarrow Y_i$, $q_i : Y_i \vee Z_i' \rightarrow (Y_i / Z_i) \vee Z_i'$ R -факторні відображення. Нехай $x \in Z_i$, тоді $\eta_i^*(x) = v_i(x) - x + \omega_i(x) = x - x + \omega_i(x) = \omega_i(x) \in G(Z_i')$. Нехай $x \in Z_i'$, у такому разі $\eta_i^*(x) = v_i(x) - x + \omega_i(x) = v_i(x) - x + x = v_i(x) \in G(Z_i)$. Отож пари $(Y_i \vee Z_i', Z_i)$ і $(Y_i \vee Z_i', Z_i')$ є A -еквівалентними й існує топологічний ізоморфізм $\kappa_i^* : A(Y_i) \rightarrow A((Y_i / Z_i) \vee Z_i')$ такий, що $\kappa_i^* \circ p_i^* = q_i^* \circ f_i^*$. Нехай $x \in Z_i \subseteq Y_i$, тоді $z \in p_i^{-1}(x)$ і $h_i(z) = v_i(z) - z + \omega_i(z) = \omega_i(z) = \tau(z)$. Отже, $\kappa_i(x) = \tau_i(x) \in Z_i' \subseteq Z_i' \vee Y_i / Z_i$. Нехай $\beta_i : A(Y_i) \rightarrow A((Y_i / Z_i) \vee Z_i')$ — тотожний ізоморфізм групи $A(X_i)$. Нехай $x \in X_i$ то $h_i \circ \beta_i(x) = h_i(x) = \tau_i \circ f_i(x) = \kappa_i \circ f_i(x)$, тобто $h_i \sim f_i$.

Нехай підпростір K є ретрактом простору X , $r : X \rightarrow K$ — відповідна ретракція. Тоді відображення r можемо розглядати також як відображення $\bar{r} : X \rightarrow X$.

Наслідок. Нехай K_i — ретракти в X_p , $i=1,2$. То ретракції $r_1 : X_1 \rightarrow K_1$ і $r_2 : X_2 \rightarrow K_2$ є A -еквівалентними тоді і тільки тоді, коли відображення $\bar{r}_1 : X_1 \rightarrow X_1$ і $\bar{r}_2 : X_2 \rightarrow X_2$ є A -еквівалентними.

Доведення. Необхідність випливає з теореми 3. Покажемо достатність. Нехай $r_1 \sim r_2$. Тоді за теоремою 2 маємо, що $X_1 / K_1 \sim X_2 / K_2$. Отже, за теоремою 3 отримаємо $\bar{r}_1 \sim \bar{r}_2$.

Теорема 4. Нехай $f_i: X_i \rightarrow Y_i$ та $i=1,2$ відображення такі, що підпростори $f_i(X_i) \in G_A$ -ретрактами в Y_i , а відображення $g_i = f_i: X_i \rightarrow f_i(X_i)$ мають праві обернені. Нехай відображення $h_i: f_i(X_i) \rightarrow X_i$ такі, що $f_i \circ h_i = I_{f_i(X_i)}$, $K_i = h_i(f_i(X_i)) \subseteq X_i$. То $f_1 \sim f_2$ тоді і тільки тоді, коли виконано умови

$$a) K_1 \sim K_2; \quad b) X_1 / K_1 \sim X_2 / K_2; \quad c) Y_1 / f_1(X_1) \sim Y_2 / f_2(X_2).$$

Доведення. За теоремою 3 маємо, що $f_1 \sim f_2$ тоді і тільки тоді, коли $g_1 \sim g_2$ і $Y_1 / f_1(X_1) \sim Y_2 / f_2(X_2)$. Згідно з теоремою 2, умова $g_1 \sim g_2$ еквівалентна умові $(K_1 \sim K_2) \wedge (X_1 / K_1 \sim X_2 / K_2)$.

A-ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ НЕСЬЮРЕКТИВНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Изложен метод сведения изоморфной классификации гомоморфных продолжений несюръективных отображений тихоновских пространств к изоморфной классификации гомоморфных продолжений сюръективных отображений тихоновских пространств.

A-ECVIVALENTNIST NESYOR'ECTIVNIH REFLECTIONS

In the paper we give a method to reduce isomorphic classification of the homomorphic extensions of the nonsurjective mappings of the Tychonoff spaces to isomorphic classification of the homomorphic extensions of the surjective mappings of the Tychonoff spaces.

Стаття надійшла 05.05.08