УДК 512. 546

Н. М. Пирч

Українська академія друкарства

ПРО ІЗОМОРФІЗМИ ВІЛЬНИХ ПАРАТОПОЛОГІЧНИХ ГРУП

Доводиться аналог теореми О. Г. Окунєва про спеціальні ізоморфізми для вільних паратопологічних груп, будується приклад двох вільних базисів у вільній паратопологічній групі, тільки один з яких є компактним.

Спеціальні ізоморфізми, паратопологічні групи, вільний базис

Паратопологічною групою називається пара (G, τ), де G — група, τ — топологія на G, причому операція множення $\cdot : G \times G \to G$, $(x, y) \mapsto xy$ є неперервною.

Означення 1. Вільною паратопологічною групою в сенсі Маркова топологічного простору X є паратопологічна група $F_p(X)$ з такими властивостями:

1) X — підпростір в $F_p(X)$;

2) X породжує $F_p(X)$ алгебраїчно;

3) для кожного неперервного відображення $f : X \to G$ у паратопологічну групу G існує і єдиний неперервний гомоморфізм $f^* : F_p(X) \to G$, що продовжує f.

Якщо в попередньому означенні вираз «паратопологічна група» замінити всюди виразом «абелева паратопологічна група», то отримаємо поняття вільної абелевої паратопологічної групи $A_p(X)$ у сенсі Маркова топологічного простору X.

Для кожного топологічного простору X вільні паратопологічні групи $F_p(X)$ і $A_p(X)$ існують і є єдиними з точністю до ізоморфізму, що залишає на місці всі точки простору X.

Означення 2. Нехай X — топологічний простір з фіксованою точкою e. Вільною паратопологічною групою в сенсі Граєва топологічного простору X називається паратопологічна група $FG_p(X)$ з такими властивостями:

1) X — підпростір в $FG_p(X)$;

2) X породжує $FG_p(X)$ алгебраїчно;

3) для кожного неперервного відображення $f : X \to G$ у паратопологічну групу G, що переводить точку e в одиницю G групи, існує і єдиний неперервний гомоморфізм $f^* : FG_p(X) \to G$, що продовжує f.

Якщо в попередньому означенні вираз «паратопологічна група» замінити всюди виразом «абелева паратопологічна група», то отримаємо поняття вільної абелевої паратопологічної групи $AG_p(X)$ в сенсі Граєва топологічного простору X.

Для довільного топологічного простору X вільні паратопологічні групи $FG_p(X)$ і $AG_p(X)$ існують і з точністю до ізоморфізму не залежать від відміченої точки e (див. [6]). Для довільного топологічного простору X вільні марковські та вільні граєвські паратопологічні групи пов’язані співвідношеннями $F_p(X)$

$\cong FG_p(X^+)$, $A_p(X) \cong AG_p(X^+)$, де X^+ — простір, що отримується з топологічного простору X додаванням однієї ізольованої точки.

Топологічні простори X та Y, що мають топологічно ізоморфні вільні паратопологічні групи $F_p(X)$ та $F_p(Y)$, будемо називати M_p-еквівалентними і позначати $X \overset{M_p}{\sim} Y$. Аналогічно топологічні простори X та Y з топологічно ізоморфними вільними абелевими паратопологічними групами $A_p(X)$ та $A_p(Y)$ називатимемо A_p-еквівалентними і позначатимемо $X \overset{A_p}{\sim} Y$.

Група цілих з дискретною топологією є топологічною. Позначимо її через Z. Вважатимемо, що ізоморфізм $i : F_p(X) \to F_p(Y)$ є спеціальним, якщо композиція $e_Y^* \circ i$ постійне відображення на X, де $e_Y^* : F_p(Y) \to Z$ — гомоморфізм, що продовжує функцію $e_Y : Y \to Z$, яка тотожно рівна 1. У роботі [2] О. Окунєв довів, коли вільні топологічні групи двох тихоновських просторів топологічно ізоморфні, то між ними існує спеціальний ізоморфізм. Цей факт дав можливість отримати широкий клас конструкцій для побудови М-еквівалентних просторів (див. [1, 2]).

Наступна теорема, як і її доведення, є незначною модифікацією теореми 3.1 з [1].

Теорема 1. *Якщо* $X \overset{M_p}{\sim} Y$, *то існує спеціальний топологічний ізоморфізм* $i : F_p(X) \to F_p(Y)$.

Для неперервного епіморфізму $\varphi : F_p(X) \to Z$ введемо поняття $ord\varphi$, прийнявши, що $ord\varphi = \{\min |k| : k \in \varphi(X) \setminus \{0\}\}$.

Аналогічно до випадку вільних топологічних груп (лема 3.3 з [1]) можна показати, що існує топологічний ізоморфізм $j : F_p(X) \to F_p(X)$ такий, що $ord(\varphi \circ j) = 1$.

Лема 1. *Для кожного неперервного гомоморфізму* $\varphi : F_p(X) \to Z$ *існує топологічний ізоморфізм* $u : F_p(X) \to F_p(X)$ *— такий, що* $(\varphi \circ u)\ (X) = 1$.

Доведення. Якщо $ord(\varphi \circ j) = 1$, то існує топологічний ізоморфізм $j : F_p(X) \to F_p(X)$ такий, що для деякого елементу x_0 з X має місце рівність $\varphi \circ j(x_0) = 1$ або $\varphi \circ j(x_0) = -1$. Якщо $\varphi \circ j(x_0) = 1$, то доведення леми є аналогічним доведенню леми 3.5 з [1]. Розглянемо випадок, коли $\varphi \circ j(x_0) = -1$. Позначимо $F_k = X \cap (\varphi \circ j)^{-1}(k)$ для кожного $k \in Z$. Тоді множини F_k, $k \in Z$ є відкрито-замкненими в X, причому $x_0 \in F_{-1}$. Визначимо відображення $l : F_p(X) \to F_p(X)$ за правилом $l_0(x) = x_0^{k-1}x$, якщо $x \in F_k$, $k \in Z$, і нехай $l : F_p(X) \to F_p(X)$ — гомоморфізм, що продовжує відображення l_0. Очевидно, відображення l_0 неперервне, а отже, неперервним є гомоморфізм l. Відображення $l_0^* : X \to F_p(X)$ означене за формулою $l_0^*(x) = x_0^{1-k}x$, якщо $x \in F_k$, $k \in Z$ є неперервним, а отже, неперервним є гомоморфізм $l^* : F_p(X) \to F_p(X)$, що його продовжує. Нехай $x \in F_k$, $k \in Z$, тоді

$l \circ l^*(x) = l(x_0^{1-k}x) = (l_0(x_0)^{1-k} l_0(x) = x_0^{1-k}x_0^{k-1}x = x.$ Аналогічно перевіряється, що $l^* \circ l(x) = x$ для всіх $x \in X$. Отже, l^* — гомоморфізм, обернений до l, тому l є топологічним автоморфізмом групи $F_p(X)$.

Нехай $u = j \circ l$, тоді $u : F_p(X) \to F_p(X)$ — топологічний ізоморфізм. Доведемо, що u — автоморфізм групи $F_p(X)$, який задовольняє умови леми 1. Нехай $x \in X$, тоді $x \in F_k$ при деякому $k \in Z$. Тоді $\varphi(u(x)) = \varphi(j(l(x))) = \varphi(j(x_0^{k-1}x) = \varphi(j(x_0))(k-1) + \varphi(j(x) = -k + 1 + k = 1$.

Доведення теореми 1. Нехай $i : F_p(X) \to F_p(Y)$ — топологічний ізоморфізм. Нехай $e_y^* : F_p(X) \to Z$ — гомоморфізм, що продовжує функцію e_Y, яка тотожно рівна 1 на просторі Y. Застосовуючи лему 1 до гомоморфізму $\varphi = e_Y^* \circ i$, отримаємо спеціальний ізоморфізм $i^* = i \circ u : F_p(X) \to F_p(Y)$.

Аналогічно до теореми 1 доводиться наступна теорема.

Теорема 2. *Якщо* $X \overset{A_p}{\sim} Y$, *то існує спеціальний топологічний ізоморфізм* $i : A_p(X) \to A_p(Y)$.

Аналогічно до випадку вільних топологічних груп (див. [2]) з теорем про спеціальні ізоморфізми випливають теореми 3, 4 та наслідок 1.

Теорема 3. *Для топологічних просторів X та Y такі умови еквівалентні:*

а) вільні абелеві паратопологічні групи в сенсі Маркова просторів X та Y топологічно ізоморфні;

б) для довільних точок $a \in X$ *та* $b \in Y$ *існує топологічний ізоморфізм* $h : A_p(X) \to A_p(Y)$, *такий, що* $h(a) = b$;

в) вільні абелеві паратопологічні групи в сенсі Граєва просторів X та Y топологічно ізоморфні.

Наслідок 1. *Якщо* $X^+ \overset{A_p}{\sim} Y^+$, *то* $X \overset{A_p}{\sim} Y$.

Нехай $\{X_s\}_{s \in S}$ — сім'я топологічних просторів з відміченими точками $x_s \in X_s$. Тоді фактор-простір $\vee_{s\in S}(X_s, x_s) = \left(\bigoplus_{s\in S} X_s\right)\left(\bigoplus_{s\in S} x_s\right)$ називається букетом сім'ї (X_s, x_s).

Теорема 4. *Нехай* $X_s \overset{A_p}{\sim} Y_s$ *для кожного* $s \in S$. *Тоді* $\vee_{s\in S}(X_s, x_s) \overset{A_p}{\sim} \vee_{s\in S}(Y_s, y_s)$.

Неперервні відображення $f_1 : X_1 \to Y_1$ і $f_2 : X_2 \to Y_2$ іменуються M_p-еквівалентними, якщо існують ізоморфізми $i : F_p(X_1) \to F_p(X_2)$ і $j : F_p(Y_1) \to F_p(Y_2)$ такі, що $f_1^* \circ i = j \circ f_2^*$, де $f_1^* : F_p(X_1) \to F_p(Y_2)$ і $f_2^* : F_p(X_2) \to F_p(Y_2)$ — гомоморфізми, які продовжують відображення f_1 і f_2.

Для деяких відображень є можливим повністю описати клас відображень M_p-еквівалентних до даного відображення. Для топологічного простору

X позначимо через $M_p\,[X]$ клас просторів M_p-еквівалентних простору X. Для неперервного відображення $f : X \to Y$ позначимо через $M_p\,[f]$ клас відображень M_p-еквівалентних відображенню f.

Позначимо через e_X відображення з простору X в одноточковий простір $E = \{e\}$, через id_X — гомеоморфізм простору X, через D_X — ущільнення з дискретного простору $D_{|X|}$ потужності $|X|$ на простір X, через AD_X — ущільнення з простору X на антидискретний простір $AD_{|X|}$ потужності $|X|$.

У прикладах 1 і 2 розглянемо будову вільної паратопологічної групи для дискретного та антидискретного топологічних просторів.

Приклад 1. Нехай X — дискретний простір. Наділимо абстрактну вільну групу $F(X)$ з множиною твірних X дискретною топологією. Група $F(X)$ з дискретною топологією є паратопологічною і задовольняє умови (1–3) з означення вільної паратопологічної групи. З єдиності вільної паратопологічної групи випливає, що вільна паратопологічна група дискретного простору X має дискретну топологію.

Приклад 2. Нехай X — антидискретний простір. Нехай $e : X \to Z$ — відображення, тотожно рівне 1 на X, $E : F_p(X) \to Z$ — гомоморфне продовження відображення e. Позначимо $G_i\,(X) = E^{-1}\,(i)$, де $i \in Z$. Тоді простір $F_p\,(X)$ є прямою сумою своїх гомеоморфних підпросторів $G_i\,(X)$. Крім того, підпростір $G_0\,(X)$ є підгрупою паратопологічної групи $F_p\,(X)$. Покажемо, що простір $G_0\,(X)$ має антидискретну топологію. Нехай $A = x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \ldots x_n^{\varepsilon_n}$ — деяке слово в $G_0\,(X)$. Нехай U — відкрита в $F_p\,(X)$ множина, що містить A. Покажемо, що U містить одиницю підгрупи $G_0\,(X)$. Оскільки $\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i = 0$, то існує k ($1 \le k < n$) таке, що $\varepsilon_k = -\varepsilon_{k+1}$. Без втрати загальності припустимо, що $\varepsilon_k = 1$. Тоді множина $x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \ldots x_{k-1}^{\varepsilon_{k-1}} \times X \times x_{k+1}^{\varepsilon_{k+1}} \ldots x_n^{\varepsilon_n}$ гомеоморфна X, а отже, повністю міститься в U. Зокрема, в U знаходиться елемент $x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \ldots x_{k-1}^{\varepsilon_{k-1}} x_{k+1}^{\varepsilon_k} x_{k+1}^{\varepsilon_{k+1}} \ldots x_n^{\varepsilon_n} = x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \ldots x_{k-1}^{\varepsilon_{k-1}} x_{k+2}^{\varepsilon_{k+2}} \ldots x_n^{\varepsilon_n}$. Повторюючи скінченну кількість раз цю операцію, отримаємо, що порожнє слово, тобто одиниця групи $G_0\,(X)$ міститься в U. Отже, простір $F_p\,(X)$ є прямою сумою своїх антидискретних підпросторів $G_i\,(X)$.

З теореми 1 випливає, якщо простори X та Y є M_p-еквівалетними, то підгрупи $G_0\,(X)$ та $G_0\,(Y)$ топологічно ізоморфними. Звідси, зокрема, випливає, що простір M_p-еквівалетний антидискретному простору є антидискретним.

Зауваження 1. Як було встановлено у твердженні 2.10 роботи [4], неперервне відображення $f : X \to Y$ є факторним тоді і тільки тоді, коли гомоморфізм $f^* : F_p(X) \to F_p\,(Y)$, що його продовжує, відкритий. Отже, відображення M_p-еквівалетне до факторного є факторним. Оскільки гомеоморфізми — це в точності факторні ущільнення, то відображення M_p-еквівалетне гомеоморфізму є гомеоморфізмом.

Теорема 5. Нехай X — тихоновський простір. Тоді:

а) $M_p\,[e_X] = \{e_Y \mid Y \in M_p\,[X]\}$;

б) $M_p\,[id_X] = \{id_Y \mid Y \in M_p\,[X]\}$;

в) $M_p\,[D_X] = \{D_Y \mid Y \in M_p\,[X]\}$;

г) $M_p\,[AD_X] = \{AD_Y \mid Y \in M_p\,[X]\}$.

Аналогічні твердження справедливі для відношення A_p-еквівалентності.

Доведення. а) Включення $M_p\,[e_X] \subseteq \{e_Y \mid Y \in M_p[X]\}$ випливає з того, що простори, на яких діють M_p-еквівалентні відображення, є M_p-еквівалентними, а простір M_p-еквівалентний одноточковому простору одноточковий. Доведемо протилежне включення. Нехай $Y \in M_p[X]$. З того, що простори X та Y є M_p-еквівалентними, то, відповідно до теореми 1, можемо стверджувати, що існує спеціальний топологічний ізоморфізм $i : F_p(X) \to F_p(Y)$. Нехай j — це тривіальний автоморфізм групи $F_p(E)$ в себе. Покажемо, що $j \circ e_X^* = e_Y^* \circ i$. Нехай $x \in X$ та $i(x) = y_1^{\varepsilon_1} y_2^{\varepsilon_2} \ldots y_n^{\varepsilon_n}$. Оскільки ізоморфізм i є спецільним, то $\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i = 1$. Таким чином,

$$e_Y^* \cdot i(x) = e_Y^*(y_1^{\varepsilon_1} y_2^{\varepsilon_2} \ldots y_n^{\varepsilon_n}) = e^{\varepsilon_1} e^{\varepsilon_2} \ldots e^{\varepsilon_n} = e^{\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i} = e^1 = j(e) = j \circ e_X^*(x).$$

Отже, $e_X \overset{M_p}{\sim} e_Y$.

б) Включення $M_p\,[id_X] \subseteq \{id_Y \mid Y \in M_p[X]\}$ випливає з того, що простори, на яких діють M_p-еквівалентні відображення, є M_p-еквівалентними, а відображення M_p-еквівалентне гомеоморфізму є гомеоморфізмом. Доведемо протилежне включення. Нехай $Y \in M_p[X]$. Покажемо, що $id_Y \in M_p[id_X]$. Нехай $i : F_p(X) \to F_p(Y)$ — топологічний ізоморфізм. Тоді $id_Y^* \circ i = i \circ id_X^*$, а тому $id_X \overset{M_p}{\sim} id_Y$.

в) Включення $M_p\,[AD_X] \subseteq \{AD_Y \mid Y \in M_p\,[X]\}$ випливає з того, що образи при M_p-еквівалентних відображеннях є M_p-еквівалетними просторами, простір M_p-еквівалетний дискретному дискретний, а відображення M_p-еквівалентне ущільненню є ущільненням. Доведемо протилежне включення. Нехай $Y \in M_p[X]$. Покажемо, що $D_Y \in M_p[D_X]$. Нехай $i : F_p(X) \to F_p(Y)$ — топологічний ізоморфізм, $j : F_p(D_{|X|}) \to F_p(D_{|Y|})$ — це ізоморфізм, алгебраїчно заданий як i, але відносно дискретних топологій на базисах X та Y. Неперервність відображень j і j^{-1} випливає з дискретності просторів $F_p(D_{|X|})$ і $F_p(D_{|Y|})$. Тоді $i \circ D_X^* = D_Y^* \circ j$, а отже, $D_X \overset{M_p}{\sim} D_Y$.

г) Включення $M_p\,[AD_X] \subseteq \{AD_Y \mid Y \in M_p\,[X]\}$ випливає з того, що образи при M_p-еквівалентних відображеннях є M_p-еквівалетними просторами, простір M_p-еквівалетний антидискретному антидискретний, а відображення M_p-еквівалентне ущільненню є ущільненням. Доведемо протилежне включення. Нехай $Y \in M_p[X]$. Покажемо, що $AD \in M_p\,[AD_X]$. За теоремою 1 існує спеціальний ізоморфізм $i : F_p(X) \to F_p(Y)$. Нехай $j : F_p(AD_{|X|}) \to F_p(AD_{|Y|})$ — це ізоморфізм, алгебраїчно заданий як i, але відносно антидискретних топологій на базисах X та Y. Оскільки $j : (AD_{|X|}) \subseteq G_0(AD_{|Y|})$, а простір $G_0(AD_{|Y|})$ антидискретне, то звуження ізоморфізму j на $AD_{|X|}$ неперервне. А тому неперервний і сам ізоморфізм j. Неперервність відображення j^{-1} перевіряється аналогічно. Тоді $AD_Y^* \circ i = j \circ AD_X^*$, а отже, $AD_X \overset{M_p}{\sim} AD_Y$.

Нагадаємо, що топологічний простір називається T_4 -простором, якщо для кожних двох диз'юнктнх замкнених підмножин F_1 і F_2 цього простору існують відкриті множини V_1 і V_2 такі, що $F_1 \subseteq V_1$, $F_2 \subseteq V_2$ і $V_1 \cap V_2 = \varnothing$. Ретракції $r_1 : X \to K_1$ та $r_2 : X \to K_2$ топологічного простору X називаються паралельними, якщо виконано умови $r_1 \circ r_2 = r_1$ і $r_2 \circ r_1 = r_2$. Образи простору X при паралельних ретракціях іменуються паралельними ретрактами простору X.

Приклад 3. Нехай $T = \{a, b\}$, $\tau = \{\varnothing, \{a\}\ \{a,b\}\}$, N — зліченний дискретний простір. Покладемо $X = T \times N$. Тоді підпростори $K_1 = \{a\} \times N$ і $K_2 = \{b\} \times N$ є дискретними паралельними ретрактами топологічного простору X. За теоремою 7 з [4] фактор-простори $Y = X/K_1$ і $Z = X/K_2$ мають топологічно ізоморфні вільні паратопологічні групи. Позначимо через $p_Y : X \to Y$ і $p_Z : X \to Z$ відповідні факторні відображення, а також що $p_Y(b_n) = y_n$, $p_Y(K_1) = y$, $p_Z(a_n) = z_n$, $p_Z(K_2) = z$. Будь-яка непорожня відкрита множина простору Y містить точку y. Розглянемо зліченне покриття простору Y відкритими множинами $F_n = \{y, y_n\}$. Це покриття не містить жодного нетривіального підпокриття, а отже, простір Y не є зліченно компактним. Єдина відкрита множина простору Z, шо містить точку z, збігається з Z, тому будь-яке відкрите покриття простору Z містить елемент, що збігається з Z, а отже, має скінченне підпокриття. Тому простір Z є компактним. Будь-які дві непорожні замкнені підмножини простору Y мають спільну точку y, тому простір Y є T_4 -простором, натомість точки z_α і z_β при $\alpha \neq \beta$ не відокремлюються відкритими в Z множинами, а тому простір Z не є T_4 -простором. Відображення p_Y є відкритим, але не замкненим; відображення p_Z є замкненим, але не відкритим.

Приклад 4. Якщо в попередньому прикладі за N взяти дискретний простір потужності τ, то фактор-простір Y матиме число Лінделефа, рівне τ, і міститиме одноточкову всюдищільну множину $\{y\}$. Тоді як фактор-простір Z буде компактним і матиме щільність, рівну τ.

З прикладів 3 і 4 випливає наступний наслідок.

Наслідок 2. Властивості бути компактним, зліченно-компактним, фінально-компактним і T_4-простором, число Лінделефа, щільність не зберігаються відношенням M_p -еквівалентності в класі T_0-просторів.

1. Окунев О. Г. М-эквивалентность произведений // Тр. Моск. мат. общ. — 1995. — 56. — С. 192–205. 2. Пирч Н. М. Конструкції, що зберігають М-еквівалентність // Вісник НУ «Львівська політехніка», фіз.-мат. науки. — 2008. — 625. С. 48–53. 3. Энгелькинг Р. Общая топология, М.: Мир, 1986. — 751 с. 4. Pyrch N. M. On the isomorphisms of the free paratopological groups and free homogeneous spaces I / Visnyk Lviv Univ. Ser. Mech–Math. — 2007. — 67. — P. 224–232. 5. Pyrch N. M., Ravsky O. V. On free paratopological groups // Matematichni Studii.— 2006. — 25. № 2. — P. 115–125. 6. Romaguera S., Sanchis M., Tkachenko M. Free paratopological groups / Romaguera S., Sanchis M., Tkachenko M. / Topology Proc. — 2002. — 27. — P. 1–28.

ОБ ИЗОМОРФИЗМАХ СВОБОДНЫХ ПАРАТОПОЛОГИЧЕСКИХ ГРУПП

Доказывается аналог теоремы О. Г. Окунева о специальных изоморфизмах для свободных паратопологических групп, строится пример двух свободных базисов в свободной паратопологической группе, только один из которых есть компактным.

ABOUT IZOMORFIZMI OF FREE PARATOPOLOGICHNIKH GROUPS

In the paper we give a modification of the Okunev's theorem on special isomorphisms for paratopological groups. The example of two free basis in free paratopological group, whith only one of them being compact is given.

Стаття надійшла 01.12.09

УДК 534.12

О. М. Горечко, Р. Р. Горечко

Українська академія друкарства

НАБЛИЖЕНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧІ ПРО ВІБРАЦІЙНУ ТЕРМОЧУТЛИВІСТЬ ПРЯМОКУТНОЇ ПАНЕЛІ В ПРУЖНОМУ КОНСТРУКТИВІ

Розглядається постановка задачі динаміки прямокутних пластин, закріплених у пружному конструктиві, при нагріванні окремих складових такої системи джерелами тепла. Температурна задача розв'язана методом теплового балансу. Власні частоти попередньо навантажених унаслідок нерівномірності нагріву чи неоднорідності пружних характеристик пластин знаходяться в припущенні про постійність температурних зусиль уздовж будь-якої з осей координат у площині пластини. Досліджено вплив нагріву однієї з пластин у стаціонарному та нестаціонарному режимах на зміну власних частот пластин системи.

Прямокутна пластина, вібрація, термопружність

Плоскі прямокутні панелі є одними з основних несучих елементів конструкцій в приладо- та машинобудуванні, будівництві [5, 7, 8]. Дослідження їхньої реакції на динамічні навантаження часто зводиться до аналізу резонансних властивостей систем, до складу яких входять такі панелі, чи їх окремих складових з метою уникнення небажаних резонансів або їх демпфування [4, 7]. Резонансні частоти пружних елементів конструкцій суттєво залежать від їх попереднього натягу (стиску) [5], що неминуче відбувається при нагріванні окремих складових пружних систем. Такий напружений стан може бути спричинений різницею температур складових системи, їх різними коефіцієнтами лінійного розширення тощо. Суттєвий вплив температурних напружень на вібраційні характеристики защемленої прямокутної пластини показано в праці [1].