УДК 655.1/.3:54.03

Л. М. Ясінська, В. З. Маїк
Українська академія друкарства
В. М. Юзевич
Фізико-механічний інститут ім. Г. В. Карпенка НАН України

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ПОВЕРХНЕВОГО ЕФЕКТУ ПРИ ХОЛОДНОМУ ТИСНЕННІ ФОЛЬГОЮ НА ПОЛІМЕРНИХ МАТЕРІАЛАХ

Проведено дослідження розтискування тонкої багатошарової композиційної (полімерної) плівки з урахуванням впливу міжфазних шарів.

Полімерна плівка, розтискування, міжфазні шари, вплив, математична модель

Відомі приклади, коли полімерне середовище, що взаємодіє з поверхнею твердого тіла, у процесі тиснення може суттєво змінювати свої властивості [3]. Процес тиснення розглядаємо з позицій проникнення в полімер пружного індентора [5]. Дослідження таких взаємодій відноситься до класу контактних задач, частковим випадком яких є оцінка механічних параметрів, котрі характеризують зміну твердості й мікротвердості.

Визначимо оцінку розтискування тонкої багатошарової композиційної (полімерної) плівки з урахуванням впливу міжфазних шарів. Досліджувана плівка складається з п'яти шарів: клею (товщиною $d_1 \approx 20 \div 25$ нм); шару алюмінію ($d_2 \approx 20 \div 25$ нм); грунтовки ($d_3 \approx 1 \div 3$ мкм); адгезиву ($d_4 \approx 0{,}1 \div 0{,}5$мкм); Pet базової плівки ($d_5 \approx 16$ мкм). До того ж при вивченні її поведінки беремо до уваги енергетичні характеристики міжфазних шарів. Металеві циліндричні валики, між якими проходить плівка, вважаємо недеформівними і моделюємо твердими інденторами радіусом R_2 і R_3 ($R_2 < R_3$).

В експериментах плівку, що проходить між двома циліндричними інденторами, стискують. Зразок її моделюють пружним шаром, не враховуючи ширини. Товщина плівки $H = d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5$. Початок координат O знаходиться в місці контакту верхнього індентора радіусом R_2 з плівкаю (тобто з клеєм). Вісь z ($z > 0$) спрямована вздовж ширини плівки, а вісь y перпендикулярна до плівки ($0< y < H$ — область плівки). У точці O на поверхні плоского шару (плівки) в напрямку осі y діє циліндричної форми абсолютно твердий індентор, обмежений, відповідно, циліндричною поверхнею $x^2 + y^2 = r^2$ ($r = R_2$; φ, r — циліндричні координати). Нижній індентор має радіус R_3, і кривизну цього індентора не враховуємо для спрощення задачі в математичному плані.

Роботу W_Z, виконану при вдавлюванні індентора в тверде тіло, визначимо на ПЕОМ, використовуючи співвідношення [5]

$$W_d = \int_0^{C_y^*} P_d \cdot dC_y, \tag{1}$$

де $C_y^* = f(\varphi, r)$ — глибина вдавлювання, яка має контур, близький до циліндричної поверхні $x^2 + y^2 = R_2^2$; $P_d = P_d(\varphi, r)$ — зусилля вдавлювання.

Відхилення від контуру $x^2 + y^2 = R_2^2$ будуть рахунком в'язкопружних деформацій [3].

Робота W_d витрачається на деформацію об'ємної частини тіла й міжфазних поверхонь між індентором (R_2) і клеєм, між клеєм та шаром алюмінію і т. д. При визначенні роботи деформування міжфазних середовищ W_d^S, яка є складовою частиною W_d, потрібно віднайти переміщення $\vec{u}$ точок півпростору по осі y залежно від координати r. Якщо $r = 0$, то згідно з [1]

$$u\Big|_{r=0} = C_y. \tag{2}$$

Переміщення $u(r)$ в області $r \in [0; C_y]$ можна знайти чисельно, оскільки відома форма поверхні індентора $r = R_2^2$, тобто

$$u = C_y - R_2^2\ . \tag{3}$$

Припустимо, що геометричні розміри поверхні контакту між індентором і тілом досить малі порівняно з максимальним переміщенням $C_y^1 = C_y^{max}$. Наближено вважаємо, що в точці M_y максимального заглиблення індентора в плівку (по осі y) діє зосереджена сила. Для оцінки переміщення u (по осі y) в околі цієї точки використаємо розв'язок задачі Бусінеска [1]

$$u\Big|_{\psi > \psi_*(r)} = B_y / r\ , \tag{4}$$

де $\psi_*(r)$ — контур між індентором і поверхнею плівки (клею); B_y — константа, яка визначається з наближеної умови

$$u\Big|_{\psi_*(r)} = C_y - B_y / R_2 \cdot \tag{5}$$

Вираз питомої роботи деформування фізичної поверхні (поверхні плівки між індентором і клеєм, а також між міжфазними середовищами на границях між частинами композиційної плівки) запишемо аналогічно як для об'ємного тіла [5]

$$w_y^S = \int_0^{C_Z^0} \sigma_{\alpha\beta}^S \cdot d\varepsilon_{\alpha\beta}^S = \sigma_0^S\, \varepsilon_0^S\ , \tag{6}$$

де $w_y^S = \Delta W_y^S / \Delta S_r$; ΔW_y^S — робота деформування поверхневої фази S_Γ^S, яка покриває елемент поверхні площею ΔS_Γ; α, $\beta = 1,2$ — індекси, що відповідають двовимірній поверхневій фазі; ε_0^S — перший інваріант тензора поверхневих деформацій.

При розрахунку w_y^S нехтуємо залежністю σ_0^S від деформації поверхні. Вважаємо, що поверхневі зусилля можна зобразити так [5]:

$$\sigma_{\alpha\beta}^S = \sigma_0^S \cdot \delta_{\alpha\beta} \cdot \qquad (7)$$

Повна робота деформування поверхневої фази S_Γ^S у цьому випадку має вигляд [5]

$$W_y^S = \int_{R_2}^{\infty} \int_0^{2\cdot\pi} w_y^S \cdot r \cdot dr \cdot d\varphi = \int_{R_2}^{\infty} \int_0^{2\cdot\pi} \sigma_0^S \cdot \varepsilon_0^S \cdot dr \cdot d\varphi\ , \qquad (8)$$

де r, φ — полярні координати на поверхні тіла з центром у точці M_y, через яку проходить лінія, що з'єднує центри інденторів (котрі проектуються на площину xOy у вигляді кругів).

Інтеграл у виразі (8) розрахуємо наближено числовим методом. Для цього на поверхні розділу S_Γ^S від точки M_y проведемо концентричні кола радіусом $r_к$ (наприклад, $r_{к+1} — r_к = 1$ мкм , $к = 1,2, ...$ — номер кільця), розділивши площину на кільця рівної ширини. Під дією індентора кільця переходять у криволінійні лінії (в тривимірному випадку — поверхні), які з достатньою точністю можна вважати боковими поверхнями зрізаних конусів.

В околі точки M_y при прогині поверхні плівки внаслідок руху індентора вздовж осі y частина індентора буде прилягати до його поверхні. Тому воронка, що виникла в плівці в околі точки M_y, має форму індентора [3]. Зовні області контакту з індентором матимемо симетричну відносно осі Oy поверхню, що нагадує конічну, де замість твірної проходить крива лінія $f_*(r)$, яку апроксимуємо параболічною залежністю. У цьому випадку деформацію кільця окреслимо як

$$\varepsilon_{K\,0}^S = (S_K - S_{K\,0})\,/\,S_{K\,0}\,, \qquad (9)$$

де S_{K0}, S_K — площі недеформованого кільця і відповідного йому зрізаного конуса (при деформуванні кільце переходить у бокову поверхню зрізаного конуса); ε_K^S — відносна деформація $к$-го кільця.

У розрахунках приймаємо [3]

$$\sigma_0^S = 0{,}86 \text{ Н/м}; \quad C_z^1 = 2 \text{ мкм}; \quad E = 100 \text{ МПа}; \quad \nu = 0{,}31; \quad r_{K+1} - r_K = 1 \text{ мкм}. \qquad (10)$$

Тут E — модуль пружності (Юнга); ν — коефіцієнт Пуассона.

Результати визначення величини роботи деформування W_y^S подаємо у вигляді

$$C_Z = 0{,}001 \text{ мм}; \quad W_y^S = 3{,}4 \cdot 10^{-5} \text{ Дж}; \quad W_y = 2{,}2 \cdot 10^{-4} \text{ Дж}. \qquad (11)$$

Оскільки плівка в'язкопружна, то в першому наближенні врахуємо залежність

$E = E(\varepsilon_0^S, \varepsilon_{ij}, t)$ (ε_{ij} — компоненти тензора об'ємних деформацій; i, $j = 1,2,3$; t — час).

На основі отриманих даних (11) виявлено, що робота деформування W_y^S поверхневої фази металу у в'язкопружній області не менша за об'ємну $W_у$ і становить близько 15%. Це багато викликано і тим, що є п'ять міжфазних шарів і, крім того, потрібно враховувати розмірний ефект міцності [5].

Аналіз результатів цієї задачі дозволяє зробити висновок, що, використовуючи співвідношення для поверхневого натягу σ_0^S [5], а також результати співвідношень (11), поправку на процес зміни мікротвердостей $M_Т$ у в'язкопружній області деформування зразків полімерної (композиційної) плівки, слід брати до уваги і прояв історії навантаження (ефекту пам'яті), оскільки це пов'язано з в'язкопружністю матеріалу зразка в оцінках $M_Т$. Процедура експозиції плівки, що проявляється в її складових частинах, приводитиме до зміни мікротвердості зразка.

Стиск плівки з урахуванням в'язкопружності спричиняє збільшення площі на молекулу. Розглянемо стиск плівки як двовимірної поверхні і поставимо їй у відповідність двовимірну в'язкість μ_s. Вважаємо, що ця в'язкість виражається добутком зсувної в'язкості η_z на товщину шару H: $\mu_s = \eta_z \cdot H$ (якщо оцінюємо в'язкість всієї плівки). Якщо розглянемо адгезив, то $\mu_s = \eta_z \cdot d_4$. Масштаб часу для відновлення початкової площі задається співвідношенням

$$t_{ad} = \frac{\eta_z \cdot d_4}{K_s}, \qquad (12)$$

де K_s — поверхневий модуль пружності.

Поверхневий модуль пружності для полімерного матеріалу було оцінено за методикою праці [5]. Орієнтовне його значення $K_s = 10^{-9}$ Н/м і за величиною близьке до експериментальних, поданих у праці [6]. Товщина адгезиву складає d_4=0,1÷0,5 мкм, а η_z = 0,1 Н·с/м^2 [6]. У результаті за допомогою співвідношення (12) отримаємо t_{ad} = 10÷50 с для d_4=0,1÷0,5 мкм.

Час t_{ad} = 10÷50 с характеризує інерційність процесу в'язкопружної деформації (зокрема, час релаксації в'язкопружних процесів), і в цьому випадку модулі Юнга (E) зсуву (G), всебічного стиску (K) та коефіцієнт Пуассона (ν) подамо у вигляді залежностей [4]

$$\overline{E} = E(1+\Gamma^*(t)); \ \overline{\nu} = \nu(1+N^*(t)); \ \overline{G} = \overline{E}/(2(1+\overline{\nu})), \ \overline{K} = \overline{E}/(3(1-2\overline{\nu})), \qquad (13)$$

де $\Gamma^*(t)$, $N^*(t)$ — резольвентні оператори одного класу; $\overline{E}, \overline{\nu}, \overline{G}, \overline{K}$ — механічні модулі для в'язкопружного середовища (плівки). Оператори $\Gamma^*(t)$, $N^*(t)$ для конкретного матеріалу адгезиву залежать від t_{ad} [4]. Оскільки на плівку діє ультафіолетове опромінювання, то $\Gamma^*(t)$, $N^*(t)$ також залежатимуть від D_u — інтегральної дози випромінювання, що вимірюється в греях (Гр).

З урахуванням ефекту в'язкопружності (13) вираз для компонент тензора напружень σ_{ij} (рівняння стану в'язкопружного тіла) матиме такий вигляд:

$$\sigma_{ij} = \left[(\overline{K} - 2 \cdot \overline{G} / 3) \cdot \varepsilon \right] \cdot \delta_{ij} + 2 \cdot \overline{G} \cdot \varepsilon_{ij}, \tag{14}$$

де $i, j = 1,2,3$; σ_{ij} — символи Кронекера; $\varepsilon = (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz})/3 = (\varepsilon_{\varphi\varphi} + \varepsilon_{rr} + \varepsilon_{zz})/3$ — перший інваріант тензора деформацій.

Використовуючи вираз (14), визначимо усереднений тиск p_s на частину зовнішньої поверхні плівки, яка контактує з другим індентором:

$$p_s = \frac{1}{S_k} \iint_{S_k} \sigma_{ij} dS = \frac{1}{S_k} \int_{R_2}^{\infty} \int_{0}^{2\cdot\pi} \sigma_{ij} \cdot r \cdot dr \cdot d\varphi, \tag{15}$$

де S_k — поверхня контакту між плівкою та індентором; dS — елемент поверхні.

Оскільки по осі z перерозподіл напружень і деформацій не враховуємо, то процедура знаходження поверхневого тиску p_s зводиться до двовимірної задачі, як і відображено у співвідношенні (15).

З урахуванням вищеподаних співвідношень, де взято до уваги поверхневі ефекти, масштабний ефект (1)–(11) та явище в'язкопружності (13) і (14), можна оптимізувати процедуру проходження композиційної (полімерної) плівки між двома валиками радіусом R_2 і R_3. Ці співвідношення — (1)–(15) є основою відповідного алгоритму.

Системи з оптимізацією забезпечують оптимальне значення напружень і деформацій, а також інших параметрів при усіх можливих умовах системи. Функціонал якості J для такої системи задамо у вигляді [7]

$$J = \int_{t_0}^{t_k} f(\overline{g}, \overline{q}, \overline{s}) dt, \tag{16}$$

де $\overline{g}$ — вектор заданих впливів (g_i — параметри системи); $\overline{q}$ — вектор керувань, який враховуватиме оптимальні значення напружень і деформацій; $\overline{s}$, — вектор невизначених збурень; $[t_0, t_k]$ — інтервал часу, протягом якого розглядається процес (формування критеріального співвідношення для технології холодного тиснення); $f(\overline{g}, \overline{q}, \overline{s})$ — функція, що відображає показник якості.

Методика застосування алгоритмів оцінювання та оптимізації розглядалась у монографії [2].

Якщо розглядати якісні характеристики окремих етапів процедури холодного тиснення як випадкові величини, то для оцінювання змін вектора якості можна запропонувати інформаційний показник змінювання якості. У цьому випадку для порівняння беремо вектори якості $\overline{a}$ і $\overline{b}$ (характеризують певні етапи технології) з функціями розподілу F_a та F_b (відповідно) і зі спільною двовимірною функцією розподілу F_{ab}. Тоді інформаційний показник змінювання якості етапів J_{ab} або кількість інформації для ситуації $\overline{b}$ відносно $\overline{a}$ можна подати у вигляді співвідношення

$$J_{ab} = \int\limits_{\substack{x \in X \\ y \in Y}} F_{ab}(dxdy) \ln \frac{F_{ab}(dxdy)}{F_a(dx)F_b(dy)}. \tag{17}$$

При цьому $f(\overline{y}, \overline{q}, \overline{s}) = J_{ab}$ і відповідний вираз підставляємо в (16). Функція J_{ab} (16) відображає інформаційний показник зміни якості етапів, а також інформації, яка буде корисною для оптимізації всього процесу холодного тиснення фольгою.

Таким чином, з урахуванням співвідношень фізики поверхневих явищ і механіки деформівного твердого в'язкопружного тіла — беручи до уваги поверхневі ефекти, масштабний ефект і в'язкопружність — розроблено алгоритм оптимізації проходження композиційної (полімерної) плівки між двома валиками радіусом R_2 і R_3. Для технології холодного тиснення з фольгою запропоновано функціонал якості, який забезпечить оптимальне значення напружень, деформацій та інших параметрів при усіх можливих умовах системи. У перспективі запропонована методика може бути використана для оптимізації холодного тиснення з фольгою для вибору матеріалу фольги з оптимальними розмірами й фізико-механічними характеристиками.

1. Александров В.М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками / В. М. Александров, С.М. Мхитарян. — М.: Наука, 1983. — 483 с. 2. Граничин О. Н. Рандомизированные алгоритмы оценивания и оптимизации при почти произвольных помехах / О. Н. Граничин, Б. Т. Поляк. — М.: Наука, 2003. — 292 с. 3. Ивенс И. Механика и термодинамика биологических мембран: пер с англ. / И. Ивенс, Р. Скейлак. — М.: Мир, 1982. — 304 с. 4. Ильюшин А.А. Основы математической теории термовязкоупругости / А. А. Ильюшин, Б. Е. Победря. — М.: Наука, 1970. — 280 с. 5. Сопрунюк П.М. Діагностика матеріалів і середовищ. Енергетичні характеристики поверхневих шарів / П.М. Сопрунюк, В.М. Юзевич. — Львів: ФМІ ім. Г. В. Карпенка НАН України, вид-во «СПОЛОМ». — 2005. — 292 с. 6. Ферри Д. Вязкоупругие свойства полимеров / Ферри Д. — М.: Химия, 1963. — 235 с. 7. Чумаков Е. П. Оптимальные и адаптивные системы / Чумаков Е. П. — М.: Энергоатомиздат, 1987. — 256 с.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПОВЕРХНОСТНОГО ЭФФЕКТА ПРИ ХОЛОДНОМ ТИСНЕНИИ ФОЛЬГОЙ НА ПОЛИМЕРНЫХ МАТЕРИАЛАХ

Проведено исследование растискивания тонкой многослойной композиционной (полимерной) пленки с учетом влияния междуфазных слоев.

A MATHEMATICAL MODEL OF THE SURFACE EFFECT OF THE COLD FOIL STAMPING ON POLYMER MATERIALS

Research of розтискування of thin multi-layered composition (polymeric) tape is conducted taking into account influence of міжфазних layers.

Стаття надійшла 26.04.10