1. www.buklib.net. 2. www.consalt.kiev.ua. 3. www.lawbook.by.ru. 4. www.marketing.spb.ru. 5. www.navigator.net.ua. 6. www.vlasnasprava.info.ua. 7. www.ur-omega.com.ua. 8. www.ur-consul.com.ua.

АНАЛИЗ СОВРЕМЕННОГО ПРОГРАММНОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ ДЛЯ МАРКЕТОЛОГОВ

Осуществлен анализ современного программного обеспечения для маркетологов. Рассмотрено шестнадцать видов программ: исследованы преимущества и недостатки каждой из них.

An ANALYSIS OF MODERN SOFTWARE IS FOR MARKETING SPECIALISTS

Modern software is analysed for marketing specialists. Sixteen types of the programs are considered: investigational advantages and failings each of them.

Стаття надійшла 12.01.11

УДК 512. 546

Н. М. Пирч

Українська академія друкарства

ПРО ВІДКРИТІ ПІДГРУПИ У ПАРАТОПОЛОГІЧНИХ ГРУПАХ

Досліджуються властивості паратопологічних груп, пов'язані з наявністю в них відкритих підгруп.

Паратопологічна група, відкрита підгрупа, вільна паратопологічна група

У роботі [5] вивчалися властивості топологічних груп, пов'язані з наявністю в них відкритих підгруп. У даній статті досліджуються аналогічні властивості для паратопологічних груп. Особливу увагу приділяємо відкритим підгрупам у вільних об'єктах – вільних (пара)топологічних групах і вільних добутках паратопологічних груп. Нагадаємо, що паратопологічною групою називається пара (G, τ), де G — група, τ — топологія на G, причому відображення множення $m: G \times G \to G$, $m(x, y) \mapsto xy$ є неперервним (топологія τ називається при цьому напівгруповою). Якщо, крім того, операція переходу до оберненого елемента $x \mapsto x^{-1}$ є неперервною на G, то пара (G, τ) іменується топологічною групою.

Означення 1. Паратопологічна група G називається ТА-групою (topologically Archimedean), якщо вона не містить відкритих підгруп, відмінних від G.

Означення 2. Паратопологічна група G називається NTA-групою (normaly topologically Archimedean), якщо вона не містить нормальних відкритих підгруп, відмінних від G.

Аналогічно до випадку топологічних груп (див. [5]) має місце наступна теорема:

Теорема 1. а) *факторгрупа довільної паратопологічої ТА-групи є ТА-групою;*

б) добуток довільної сім'ї паратопологічних ТА-груп є ТА-групою;

в) паратопологічна група, що містить всюди щільну ТА-групу, є ТА-групою;

г) якщо N — нормальна підгрупа паратопологічної групи G є такою, що групи N і G /N є ТА-групами, то група G є ТА-групою.

Зауваження 1. Усі твердження теореми 1 залишаться справедливими, якщо термін ТА-група замінити всюди терміном NТА-група.

Означення 3. Паратопологічна група *G* називається SMOG-групою (sufficiently many open subgroups), якщо перетин усіх відкритих підгруп у *G* містить лише одиницю групи *G*.

Означення 4. Паратопологічна група *G* іменується SMONG-групою (sufficiently many open normal subgroups), якщо перетин усіх відкритих нормальних підгруп у *G* містить лише одиницю групи *G*.

За аналогією до випадку топологічних груп (див. [5]) можемо стверджувати, що:

Теорема 2. а) *підгрупа довільної паратопологічої SMOG-групи є SMOG-групою;*

б) добуток довільної сім'ї паратопологічних SMOG-груп є SMOG-групою.

Зауваження 2. Усі твердження теореми 2 залишаться справедливими, якщо термін SMOG–група замінити всюди терміном SMONG-група.

Для топологічного простору *X* позначатимемо: через *Fp(X)* — вільну паратопологічну групу в сенсі Маркова простору *X* (див. [7]); через *FGp(X)* — вільну паратопологічну групу в сенсі Граєва простору *X* (див. [8]). Для тихоновського простору *X* будемо позначати: через *F(X)* — вільну топологічну групу d сенсі Маркова простору *X* (див. [4]); через *FG(X)* — вільну топологічну групу d сенсі Граєва простору *X* (див. [4]).

Теорема 3. *Нехай X — топологічний простір. Тоді наступні умови є еквівалентними:*

1) *вільна (абелева) паратопологічна група в сенсі Граєва простору X є зв'язною;*

2) *вільна (абелева) паратопологічна група в сенсі Граєва простору X є* ТА-*групою;*

3) *вільна (абелева) паратопологічна група в сенсі Граєва простору X є N*ТА-*групою;*

4) *топологічний простір X є зв'язним.*

<u>Доведення.</u> Імплікація $1) \Rightarrow 2)$ випливає з того, що кожна відкрита підгрупа паратопологічної групи є відкрито-замкненою (див. [4]), а отже, кожна паратопологічна ТА-група є зв'язною.

Імплікація $2) \Rightarrow 3)$ очевидна.

Доведемо справедливість імплікації $3) \Rightarrow 4)$. Нехай *X* — топологічний простір з відміченою точкою *e*. Припустимо, що простір *X* є незв'язним. Нехай *U* і *V* непорожні неперетинні відкрито-замкнені множини в *X*, об'єднання яких дорівнює *X*. Без втрати загальності припустимо, що $e \in U$. Тоді відображення $f : X \to Z_2$ з топологічного простору *X* у дискретну топологічну групу $Z_2 = \{0,1\}$, означене як $f|_U = 0$, $f|_V = 1$, є неперервним. За означенням вільної паратопологічної групи ми можемо продовжити це відображення до неперервного групового гомоморфізму $f^* : FG_p(X) \to Z_2$. Ядро цього гомоморфізму є нетривіальною відкрито-замкненою нормальною підгрупою в $FG_p(X)$.

Імплікація $4) \Rightarrow 1)$ випливає з того, що паратопологічна група $FG_p(X)$ алгебраїчно породжується своїм зв'язним підпростором *X*, а отже, є зв'язною.

Аналогічно до теореми 3 доводиться наступна теорема.

Теорема 4. *Нехай X — тихоновський простір. Тоді наступні умови є еквівалентними:*

1) *вільна (абелева) топологічна група в сенсі Граєва простору X є зв'язною;*

2) *вільна (абелева) топологічна група в сенсі Граєва простору X є* ТА-*групою;*

*3) вільна (абелева) топологічна група в сенсі Граєва простору X є N*ТА-*групою;*

4) *топологічний простір X є зв'язним.*

Зауваження 3. Для кожного непорожнього простору *X* вільна (абелева) (пара)топологічна група в сенсі Маркова містить відкриту нормальну підгрупу, що складається з усіх елементів вигляду $g = x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \ldots x_n^{\varepsilon_n}$, для яких $\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i = 0$, тому вільна (абелева) (пара)топологічна група у сенсі Маркова непорожнього простору не може мати властивостей ТА і NТА. Квазікомпонентою точки *x* топологічного простору *X* називається перетин усіх відкрито-замкнених підмножин у *X*, що містять точку *x*. Топологічний простір *X* іменується цілком незв'язним, якщо всі його квазікомпоненти — одноточкові множини.

Теорема 5. *Нехай X — топологічний простір. Тоді наступні умови є еквівалентними:*

1) *вільна (абелева) паратопологічна група в сенсі Граєва простору X є SMONG-групою;*

2) вільна (абелева) паратопологічна група в сенсі Граєва простору X є SMOG-групою;

3) *вільна (абелева) паратопологічна група в сенсі Граєва простору X є цілком незв'язною;*

4) *топологічний простір X є цілком незв'язним.*

Доведення. Імплікація $1) \Rightarrow 2)$ очевидна.

Імплікація $2) \Rightarrow 3)$ випливає з того, що кожна відкрита підгрупа паратопологічної групи є відкрито-замкненою, а отже, кожна SMOG-група є цілком незв'язною.

Імплікація $3) \Rightarrow 4)$ випливає з того, що підпростір цілком незв'язного простору є цілком незв'язним.

Доведемо імплікацію $4) \Rightarrow 1)$. Нехай X — цілком незв'язний топологічний простір з відміченою точкою e, $g = x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \dots x_n^{\varepsilon_n}$ — довільний елемент із $FG_p(X)$, записаний у нескоротному вигляді.

Побудуємо нормальну відкриту підгрупу у $FG_p(X)$, що не містить елемента g. Нехай $\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ — множина елементів з X, що входять у нескоротний запис елемента g. Оскільки простір X є цілком незв'язним, то існує неперервне відображення $f : X \to Z_{m+1}$ з X у дискретний топологічний простір $Z_{m+1} = \{0,1,\dots,m\}$, таке, що $f(e) = 0$, $f(a_i) = i$ при $1 \le i \le m$. Відображення f продовжується до неперервного групового гомоморфізму $f^* : FG_p(X) \to FG_p(Z_{m+1})$. Ядро цього гомоморфізму є нормальною відкрито-замкненою нормальною підгрупою у $FG_p(X)$, яка за побудовою не містить елемента g.

Аналогічно до теореми 5 доводиться

Теорема 6. *Нехай X — тихоновський простір. Тоді наступні умови є еквівалентними:*

1) *вільна (абелева) топологічна група в сенсі Граєва простору X є SMONG-групою;*

2) вільна (абелева) топологічна група в сенсі Граєва простору X є SMOG-групою;

3) *вільна (абелева) топологічна група в сенсі Граєва простору X є цілком незв'язною;*

4) *топологічний простір X є цілком незв'язним.*

Зауваження 4. Вільна (абелева) (пара)топологічна група в сенсі Маркова топологічного простору X є топологічно ізоморфною вільній (абелевій) (пара)топологічній групі в сенсі Граєва простору X^+ (тут X^+ — топологічний простір, отриманий з простору X додаванням однієї ізольованої точки). Оскільки додавання чи відкидання від топологічного простору ізольованих точок не впливає на його властивість бути цілком незв'язним, то теореми 5 і 6 можна аналогічним чином переформулювати для вільних груп у сенсі Маркова.

Означення 5. Нехай $\{G_i : i \in I\}$ — сім'я паратопологічних груп. Паратопологічну групу G називатимемо вільним топологічним добутком сім'ї груп $\{G_i : i \in I\}$ (позн. $\prod_{i \in I}^* G_i$), якщо виконано умови:

1) група G містить групи G_i як свої підгрупи;

2) мінімальна підгрупа групи G, що містить у собі всі підгрупи G_i, збігається з G;

3) якщо для кожного $i \in I$ існує неперервний гомоморфізм $f_i : G_i \to H$ з паратопологічної групи G_i у паратопологічну групу H, то існує неперервний гомоморфізм f з паратопологічної групи G у паратопологічну групу H такий, що $f|_{G_i} = f_i$ для всіх $i \in I$.

Зауважимо, що кожен співмножник G_i є образом вільного добутку $\prod_{i\in I}^{*} G_i$ при відкритій гомоморфній ретракції, тобто є факторгрупою паратопологічної групи $\prod_{i\in I}^{*} G_i$ (див. [1]).

Теорема 7. *Вільний добуток* $\prod_{i\in I}^{*} G_i$ *сім'ї паратопологічних груп* $\{G_i : i \in I\}$ *є TA-групою тоді і тільки тоді, коли всі співмножники* G_i *є TA-групами.*

Доведення. Необхідність. Випливає з того, що кожна група G_i є факторгрупою вільного добутку, а властивість бути TA-групою зберігається при переході до факторгруп.

Достатність. Нехай H — відкрита підгрупа в $\prod_{i\in I}^{*} G_i$. Тоді $H \cap G_i$ — відкрита підгрупа в G_i для кожного $i \in I$. Оскільки всі групи G_i є TA-групами, то $H \cap G_i = G_i$ для кожного $i \in I$. Отже, підгрупа H містить усі групи G_i, а тому за означенням вільного добутку збігається з $\prod_{i\in I}^{*} G_i$.

Аналогічно до теореми 7 доводиться наступна теорема.

Теорема 8. *Вільний добуток* $\prod_{i\in I}^{*} G_i$ *сім'ї паратопологічних груп* $\{G_i : i \in I\}$ *є NTA-групою тоді і тільки тоді, коли всі співмножники* G_i *є NTA-групами.*

Теорема 9. *Вільний добуток* $\prod_{i\in I}^{*} G_i$ *сім'ї паратопологічних груп* $\{G_i : i \in I\}$ *є SMONG-групою тоді і тільки тоді, коли всі співмножники* G_i *є SMONG-групами.*

Доведення. Необхідність випливає з того, що властивість бути SMONG-групою зберігається при переході до підгруп.

Достатність. Нехай усі групи G_i є SMONG-групами. Нехай також $g = g_1 g_2 ... g_n$ — довільний елемент з $\prod_{i\in I}^{*} G_i$. Побудуємо відкриту нормальну підгрупу в $\prod_{i\in I}^{*} G_i$, що не містить елемента g. Якщо для деякого індексу $i \in I$ група G_i не містить елементів, які входять у нескоротний запис елемента g, то приймемо, що $H_i = G_i$. Коли група G_i містить елементи, що входять у нескоротний запис елемента g, то за властивістю SMONG існує відкрита нормальна підгрупа H_i у G_i, яка не містить жодного з вищезгаданих елементів. Оскільки всі підгрупи H_i є відкритими у G_i, то всі факторгрупи G_i/H_i дискретні, а отже, дискретний і їхній вільний добуток $\prod_{i\in I}^{*} (G_i / H_i)$ (див. [1]). Нехай

$f_i : G_i \to G_i / H_i$ — природні гомоморфізми. Розглянемо гомоморфізм $f : \prod^*_{i\in I} G_i \to \prod^*_{i\in I} (G_i / H_i)$ як продовження гомоморфізмів f_i. Через те що паратопологічна група $\prod^*_{i\in I} (G_i / H_i)$ дискретна, то її одиничний елемент є відкритою множиною, а отже, ядро гомоморфізму f являє відкриту нормальну підгрупу в $\prod^*_{i\in I} G_i$, яка за побудовою не містить елемента g.

Означення 6. Паратопологічна група G називається TNA-групою (topologically non Archimedean), якщо вона має базу з відкритих підгруп.

Теорема 10. *Кожна паратопологічна група TNA-група є топологічною групою.*

Доведення. Нам потрібно довести неперервність відображення. $i : x \mapsto x^{-1}$. Для того достатньо довести, що прообраз довільного елемента бази при відображенні i відкритий. Залишається зазначити, що $i^{-1}(H) = H$ для кожної підгрупи, зокрема, прообраз відкритої підгрупи є відкритою підгрупою.

Нехай (G,τ) — паратопологічна група. На групі G можемо означити нову топологію τ_{os}, базою якої є відкриті підгрупи топології τ на G. Аналогічно до випадку топологічних груп перевіряємо, що множина всіх відкритих підгруп у (G,τ) задовольняє всім властивостям системи околів одиниці топологічної групи, а тому має місце наступна теорема.

Теорема 11. *Для кожної паратопологічної* (G,τ) *пара* (G,τ_{os}) *є топологічною групою. Причому група* (G,τ_{os}) *віддільна тоді і тільки тоді, коли група* (G,τ) *є SMOG-групою.*

Група (G,τ_{os}) володіє універсальною властивістю, а саме:

Теорема 12. *Нехай* (G,τ) *— паратопологічна група. Для довільного неперервного гомоморфізму* $f : (G,\tau) \to (K,\theta)$ *з групи G у TNA-групу* (K,θ)*, гомоморфізм* $f : (G,\tau_{os}) \to (K,\theta)$ *є також неперервним.*

Доведення. Нехай $f : (G,\tau) \to (K,\theta)$ — неперервний гомоморфізм паратопологічних груп (G,τ) і (K,θ). Нам потрібно показати, що цей гомоморфізм також неперервний відносно топологій τ_{os} і θ. Для цього достатньо перевірити, що прообрази елементів бази топології θ при відображенні f є відкритими в топології τ_{os}. Оскільки пара (K,θ) є TNA-групою, то базу елементів топології θ утворюють відкриті підгрупи. Їх прообразами при відображенні f будуть відкриті підгрупи у (G,τ), які за означенням є відкритими множинами у (G,τ_{os}).

Теорема 13. *Зіставлення* $(G,\tau)|\!\to(G,\tau_{os})$ *визначає коваріантний рефлексивний функтор з категорії паратопологічних груп та їхніх неперервних гомоморфізмів у категорію топологічних TNA-груп та їхніх неперервних гомоморфізмів.*

Доведення. Нехай $f : (G,\tau) \to (K,\theta)$ — неперервний гомоморфізм паратопологічних груп (G,τ) і (K,θ). Нам потрібно показати, що цей гомоморфізм буде також неперервним відносно топологій τ_{os} і θ_{os}. Оскільки топологія θ_{os} слабша, ніж топологія θ, то відображення f є неперервним відносно топологій τ і θ_{os}. Через те що група (K, θ_{os}) є TNA-групою, то за теоремою 12 відображення f неперервне відносно топологій τ_{os} і θ_{os}.

Теорема 14. *Вільна паратопологічна група $F_p(X)$ у сенсі Маркова топологічного простору X є TNA-групою тоді і тільки тоді, коли простір X є прямою сумою свох антидискретних просторів.*

Доведення. Необхідність. Нехай група $F_p(X)$ є TNA-групою. Тоді $F_p(X)$ є топологічною групою. Отож (див. [7]), простір X є прямою сумою своїх антидискретних підпросторів.

Достатність. Нехай простір X є прямою сумою своїх антидискретних підпросторів. Тоді група $F_p(X)$ є також прямою сумою своїх антидискретних підпросторів (див. [6]), причому найбільша антидискретна підмножина, що містить одиницю групи $F_p(X)$, є замкненою нормальною підгрупою в $F_p(X)$ (див. [6, 7]). Отже, група $F_p(X)$ є TNA-групою.

1. Пирч Н. М. Вільні добутки паратопологічних груп // Математичні студії. — 2010. — 33. — №2. — С. 139–146. 2 Юнусов А. С. О квазикомпоненте свободных топологических групп //Мат. исслед., — Вып. 74. — Кишинев, Штиинца, 1983. — С. 1632165. 3.Энгелькинг Р. Общая топология. — М.: Мир, 1986. — 751 с. 4. Arhangel'ski A., Tkachenko M. Topological Groups and Related Structures. – Amsterdam-Paris: Atlantis Press, 2008, — 781 p. 5. Higasikawa M. Topological groups with several disconnectness //arXiv:math/0106105v1. 6. Pyrch N. M. On the isomorphisms of the free paratopological groups and free homogeneous spaces // Visnyk Lviv Univ. Ser. Mech.- Math. — 2007. — Vol. 63. — p. 224–232. 7. Pyrch N. M., Ravsky O. V. On free paratopological groups // Matematichni Studii.– 2006. — 25. — №2. — P. 115–125. 8. Romaguera S., Sanchis M., Tkachenko M. Free paratopological groups- // Topology Proc. — 2002. — 27. — C. 1–28.

ОБ ОТКРЫТЫХ ПОДГРУППАХ В ПАРАТОПОЛОГИЧЕСКИХ ГРУППАХ

Исследуются свойства паратопологических групп, связанные с наличием в них открытых подгрупп.

ON OPEN SUBGROUPS OF PARATOPOLOGICAL GROUPS

In the paper we investigate the properties of paratopological groups connected with the presence of the open subgroups.

Стаття надійшла 30.09.11