1.Овсяк В.К. Засоби еквівалентних перетворень алгоритмів інформаційно-технологічних систем / В.К. Овсяк //Доп. Нац. акад. наук України. – 1996. – № 9. – С.83–89. 2. Овсяк В.К. Алгоритми: аналіз методів, алгебра впорядкувань, моделі, моделювання. – Львів, 1996. – 132 с. 3. Owsiak A. Teoria algorytmów abstrakcyjnych i modelowanie matematychne systemów informacyjnych / Owsiak W., Owsiak A., Owsiak J. //Opole: Politechnika Opolska, 2005. – 275 s. 4. Ovsyak V. The extended algebra of algorithms width multiconditional elimination / V. Ovsyak, A. Ovsyak //Вісн. Нац. ун-ту "Львівська політехніка": Комп'ютерні науки та інформаційні технології. – 2010. – № 672. – С. 291 – 300. 5. Owsiak W. Rozszrzerzenie algebry algorytmów / W. Owsiak, A. Owsiak //Pomiary, automatyka, kontrola. – 2010. – № 2. – S.184–188. 6. Шилдт Геррберт. C# 4.0: Полн. рук.; пер. с англ. – М.: ООО «И.Д. Вильямс», 2011. – 1056 с.

МОДЕЛЬ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ ИНСТРУМЕНТАЛЬНЫХ СРЕДСТВ РЕДАКТОРА ГРАФИЧЕСКИХ УНИТЕРМОВ

Средствами алгебры алгоритмов описана модель функционирования инструментальных средств редактора графических унитермов.

MODEL OPERATION TOOLKITS EDITORS GRAPHIC UNITERMS

Means algebra algorithms described model of tools unitermiv graphic editor.

Стаття надійшла 04.10.2012

УДК 512.8

Р. В. Коляда
Українська академія друкарства

О. М. Мельник
Львівський національний університет ветеринарної медицини та біотехнологій імені С.З. Гжицького

ПРОСТОРОВІ МАТРИЦІ: АНАЛІЗ І ПЕРСПЕКТИВИ

Розглядаються різні математичні підходи до аналізу багатовимірних даних: класичний, векторно-матричний, тензорний, функціонального аналізу. Здійснено огляд стану та визначено перспективи розвитку матричного підходу до аналізу багатовимірних даних. Лінеаризовано матричний многочлен, коефіцієнтами якого є кубічні числові матриці.

Багатовимірні дані, просторова матриця, добуток матриць, транспонування матриці, лінеаризація

Розглядатимемо математичні дані, які в мовах програмування прийнято називати цілими чи дійсними константами або змінними. Будемо називати їх багатовимірними, якщо вони складаються з одного або більше чисел, з однієї або більше змінних. У даний час можна виділити декілька підходів до аналізу багатовимірних даних: класичний (скалярний); функціонального аналізу; векторно-матричний; тензорний; багатовимірно-матричний.

Класичний підхід характеризується тим, що наявний набір даних складається з окремих скалярних чисел або змінних. Математична модель даних будується як співвідношення, що пов'язує між собою окремі скалярні змінні. Теоретичну основу класичного підходу становить класичний математичний аналіз [9]. Йому властиві наступні недоліки:

1) громіздкість математичних моделей багатовимірних даних, отриманих з його допомогою; 2) відсутність аналогії з одновимірним випадком; 3) погана формалізованість. Зокрема, формалізованими є лексико-графічне упорядкування, Кронекерів (прямий) добуток матриць, векторизація матриць.

Підхід функціонального аналізу вирізняється тим, що багатовимірні дані розглядаються як елементи деяких абстрактних математичних просторів. При побудові математичних моделей даних використовується поняття відображень цих просторів. Теоретичною основою підходу є функціональний аналіз [6, 9].

При *векторно-матричному підході* окремі скалярні змінні упорядковуються в набори, які називаються векторами і матрицями. Теоретичну основу підходу складають теорія матриць і матричний аналіз [4, 12]. Цей підхід долає більшість недоліків класичного підходу. По-перше, він суворо формалізований і менш громіздкий. По-друге, багатовимірні моделі, одержані в його рамках, багато в чому подібні до моделей одновимірного випадку. Має обмежені можливості для представлення багатовимірних нелінійних даних, оскільки за допомогою його можна отримати не більше ніж квадратичні моделі.

Багатовимірно-матричний підхід використовує змінну як багатовимірну матрицю. Багатовимірною (p-вимірною) ($n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_p$) -матрицею

$$A = (a_{i_1, i_2, \ldots, i_p}),\ i_j = 1, 2, \ldots, n_j,\ \ j = 1, 2, \ldots, p\,, \tag{1}$$

називається система чисел або змінних $a_{i_1, i_2, \ldots, i_p}$, розташованих у точках p-вимірного простору з координатами $i_1, i_2, \ldots, i_p$ [11]. Якщо $n_1 = n_2 = \ldots = n_p = n$, то матриця іменується p-вимірною n-го порядку. Визначення багатовимірної матриці (1) природним чином узагальнює відомі поняття скалярної величини, вектора і двомірної матриці: скаляр, вектор і двомірна матриця є відповідно нуль-, одно- і двовимірними багатовимірними матрицями. Має як переваги, так і недоліки над векторно-матричним підходом.

Розглядається також питання про застосування для аналізу багатовимірних даних *поняття тензора* [10]. Тензором A рангу $p = r + s$ типу (r, s) (r разів коваріантного і s разів контраваріантним) називається геометричний об'єкт, який у кожному базисі e_i, $i = 1, 2, ..., n$ дійсного n-вимірного лінійного простору L^n визначається $nr + s$ координатами $a_{i_1 \ldots i_r}^{k_1 \ldots k_s}$ (індекси i_1, ..., i_r, k_1, ..., k_s, незалежно приймають значення 1,2, ..., n), володіє властивістю, що його координати $a_{i'_1 \ldots i'_r}^{k'_1 \ldots k'_s}$ у базисі $e_{i'}$, $i' = 1, 2, ..., n$ пов'язані з координатами $a_{i_1 \ldots i_r}^{k_1 \ldots k_s}$ в базисі e_i співвідношеннями

$$a_{i'_1 \ldots i'_r}^{k'_1 \ldots k'_s} = b_{i'_1}^{i_1} \cdots b_{i'_r}^{i_r}\, b_{k_1}^{k'_1} \cdots b_{k_s}^{k'_s}\, a_{i'_1 \ldots i'_r}^{k'_1 \ldots k'_s}\,, \tag{2}$$

де $b_{i'}^{i}$ – елементи матриці переходу від базису e_i до базису $e_{i'}$, а $b_k^{k'}$ – елементи матриці зворотного переходу від $e_{i'}$ до e_i. Формула (2) описує перетворення координат тензора при перетворенні базису [5]. Суть тензорного підходу полягає у використанні тензора як багатовимірної матриці. Визначення тензора суттєво відрізняється від визначення багатовимірної матриці. Тензор визначається як геометричний об'єкт у n-вимірному лінійному просторі L^n, що перетворюється за формулами (2) при переході до нового базису простору, тоді як багатовимірна матриця є об'єктом у p-вимірному просторі індексів. Спільним у цих двох поняттях є те, що багатовимірна матриця і тензор є сукупностями багатоіндексних величин. З другого боку, тензор як сукупність багатоіндексних величин не є багатовимірною матрицею, бо не розглядається в просторі своїх індексів. Оскільки всі індекси тензора набувають значення від 1 до n, то тензорами можна описати лише матриці розмірів $n \times n$ (квадратні), $n \times n \times n$ (кубічні), $n \times n \times \ldots \times n$ і багатовимірні матриці довільних розмірів.

Основи теорії багатовимірних матриць закладені Н.П. Соколовим [11]. Найважливішим поняттям цієї теорії є (λ, μ)- згорнутий добуток багатовимірних матриць. Нехай A – p-вимірна матриця

$$A = (a_{i_1, i_2, \ldots, i_p}),\ i_\alpha = 1, 2, \ldots, n_\alpha,\ \alpha = 1, 2, \ldots, p \tag{3}$$

і B – q-вимірна матриця

$$B = (b_{j_1, j_2, \ldots, j_q}),\ j_\alpha = 1, 2, \ldots, n_\alpha,\ \alpha = 1, 2, \ldots, q\,. \tag{4}$$

Розглянемо питання множення матриць. Нехай

$$i = (i_1, i_2, \ldots, i_p) = (l, s, c),\ j = (j_1, j_2, \ldots, j_q) = (c, s, m)\,,$$

де $l = (l_1, l_2, \ldots, l_k)$; $s = (s_1, s_2, \ldots, s_\lambda)$; $c = (c_1, c_2, \ldots, c_\mu)$; $m = (m_1, m_2, \ldots, m_\nu)$, причому $k + \lambda + \mu = p$, $\lambda + \mu + \nu = q$. У такому разі матриці $A = (a_{l,s,c})$, $B = (b_{c,s,m})$, де індекси l,s,c,m пробігають свої діапазони значень. Тоді

$D = {}^{\lambda,\mu}(AB) = {}^{\lambda,\mu}(A_{(k,\lambda,\mu)} B_{(\mu,\lambda,\nu)}) = (\sum_c a_{l,s,c} b_{c,s,m}) = (d_{l,s,m})$ називається (λ, μ)-згорнутим добутком матриць A і B. Проблема транспонування просторових матриць є неоднозначною і розглядається в роботах [1–3].

Нехай $A(x) = \left\| A_{ijk}(x) \right\|$, $(i, j, k = 1, 2, \ldots, n)$ – кубічна матриця n-го порядку, елементами якої є многочлени степеня m, яку запишемо у вигляді [7, 8]

$$A(x) = A^0{}_{ijk} x^m + A^1{}_{ijk} x^{m-1} + \cdots + A^m{}_{ijk}\,, \tag{5}$$

де $A^s{}_{ijk}$, $s = 0, 1, 2 \cdots m$ – числові кубічні матриці, і для кожної трансверсалі i (або j чи k) $p_i(x) = p_0^i x^{mn} + p_1^i x^{mn-1} + \ldots + p_{mn}^i$ – визначник.

Твердження. У многочленної кубічної матриці (5) для кожної трансверсалі ijk визначено многочлен

$$Ex - L = \begin{Vmatrix} E & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \ddots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A^0{}_{ijk} \end{Vmatrix} \cdot x - \begin{Vmatrix} 0 & E & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & E \\ -A^m{}_{ijk} & -A^{m-1}{}_{ijk} & \cdots & -A^1{}_{ijk} \end{Vmatrix},$$

де $A_{ijk}^{s}=\left\|\begin{matrix} 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ p_{s+2(n-1)} & \cdots & p_{s+2} & p_s \end{matrix}\right\|$, $s=1,2,\dots,m$, $A_{ijk}^{0}=\left\|\begin{matrix} 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ p_{mn} & p_{m(n-1)} & \cdots & p_{2m} & p_m \end{matrix}\right\|$,

такий, що $det\,A(x)=det\,(Ex-L)$.

Теорема. Матриця $Ex-L$ є лінеаризацією матричного многочлена (5).

Доведення теореми одержимо, урахувавши роботи [8] і [11].

1. Гальмак А.М. Транспонированные вектор-матрицы /А.М. Гальмак// Проблемы физики, математики и техники. – 2011. – № 1 (6). – С. 52–56. 2. Гальмак А.М. О вектор-матрицах и пространственных матрицах /А.М. Гальмак// Проблемы физики, математики и техники. – 2012. – № 1 (10). – С. 75–86. 3. Гальмак А.М. Полиадические группы пространственных матриц /А.М. Гальмак// Проблемы физики, математики и техники. – 2011. – № 2 (11). – С. 68–75. 4. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц / Ф.Р. Гантмахер.– М.: Наука, 1988. – 552 с. 5. Ильин В.А. Линейная алгебра / В.А. Ильин В.А., Э.Г Позняк.– М.: Наука, 1974. – 296 с. 6. Колмогоров А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. – М.: Наука, 1972. – 496 с. 7. Kolyada R.V. Linearization of spatial matrix polynomials: International Mathematical conference: abstracts of talks /R.V.Kolyada, O.M. Melnyk. – Mykolayiv: Published by Mykolaiv V.O. Suchomlinsky National University, 2012. – 240 p. 8. Kolyada R.V. Some properties of determinants of the spatial matrices /R.V. Kolyada, O.M. Melnyk // 8th International Algebraic Conferens. Lugansk, Ukraina, 2011. – P.167. 9. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа / Л.Д. Кудрявцев.– М.: Высш. шк., 1981. – Т. 2. – 584 с. 10. Муха В.С. Анализ многомерных матриц: проблемы, состояние, перспективы /В.С. Муха// Доклады БГУИР. – 2004, № 1. – С. 38–49. 11. Соколов Н.П. Введение в теорию многомерных матриц / Н.П. Соколов. – К.: Наукова думка, 1972. – 176 с. 12. Хорн Р. Матричный анализ / Р. Хорн, Ч. Джонсон. – М.: Мир, 1989. – 656 с.

ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ МАТРИЦЫ: АНАЛИЗ И ПЕРСПЕКТИВЫ

Рассматриваются различные математические подходы к анализу многомерных данных: классический, векторно-матричный, тензорный, функционального анализа. Выполнен обзор состояния и определены перспективы развития матричного подхода к анализу многомерных данных. Линеаризирован матричный многочлен, коэффициентами которого являются кубические числовые матрицы.

SPATIAL MATRICES: ANALYSIS AND PERSPECTIVES

Different mathematical approaches (classical, matrix-vector, tensor and functional analysis approaches) to the analysis of multivalued data are considered. The prospectives of development of matrix approach to the analysis of multivalued data is described. The matrix polynomial with cubical numerical matrices as coefficients is linearized.

Стаття надійшла 21.11.2012

УДК 681.006.063

Б.В. Дурняк, Р.Б. Стахів, О.М. Назаренко
Українська академія друкарства

МАРКУВАННЯ ТОВАРІВ, ЩО РЕАЛІЗУЮТЬСЯ НА ОСНОВІ ВИКОРИСТАННЯ ДРУКАРСЬКИХ ТЕХНОЛОГІЙ: СТАНДАРТИ ТА ВИМОГИ

Окреслено стандарти та вимоги до маркування товарів, які реалізуються на основі використання друкарських технологій.

Маркування товарів, стандарти, вимоги, друкарські технології

Визначення якості товарів грунтується на встановленні відповідності товару тим чи іншим вимогам до виробів, які формуються, на етапі проектування. Ця відповідність забезпечується такими чинниками, як:

процес проектування;

технологічний процес виготовлення товару;

усіма іншими, що діють на товар з моменту його виготовлення і до використання (пакування, зберігання, транспортування тощо).

Виробництво тих чи інших товарів і передусім харчової продукції потребує включення в процес виготовлення заходів захисту, що запобігає використанню неякісних продуктів. З огляду на це слід вирішити наступні завдання:

запровадити контроль процесу проектування виробів і виготовлених виробів;

ввести контроль відповідності маркування для ідентифікації виробу, самого виробу, особливо продуктів харчування;

встановити загальноприйняті методи проведення відповідного контролю.

Оскільки найбільш загальним є завдання організації контролю відповідності продукту певним вимогам, то необхідно створити методики його проведення. Такі методики базуються на певних вимогах, що формуються у вигляді стандартів [1,2]. Дані стандарти визначають загальні положення щодо процедур визначення рівня або систем оцінки відповідності. Залежно від сторони, котра здійснює оцінювання, оцінка ділиться на категорії:

оцінка відповідності першою стороною, коли особа або організація, котра приймає декларацію про відповідність, підтримує її випробуванням у власній або зовнішній лабораторії (перевіряє відповідність продукту заданим вимогам);