$$dW^{*} = dF_M + V\Delta\sigma_n d\varepsilon_{T1} + dW_\varepsilon ; \tag{31}$$

$$dW^{*} = dG_M + V\Delta\sigma_n d\varepsilon_{T1} . \tag{32}$$

Баланс повної енергомісткості матеріалу матиме вигляд

$$dI=dH+d\ ^{*}, \tag{33}$$

де I – густина внутрішнього енерговмісту в матеріалі.

Після підстановки у рівняння балансу (33) механічних (30 – 32) і термодинамічних (10), (14) і (15) потенціалів (рис. 2) одержимо рівняння

$$dI = dU + P_C dV + dW_\sigma + dW_\varepsilon ; \tag{34}$$

$$dI = dF + TdS + P_C dV + dF_M + V\Delta\sigma_n d\varepsilon_{T1} + dW_\varepsilon ; \tag{35}$$

$$dI = dG + TdS + dG_M + P_C dV + V\Delta\sigma_n d\varepsilon_{T1} . \tag{36}$$

Якщо інваріанти тензорів напружень і деформацій σ, ε, σ_i і ε_i взяти за основні, то густину енергії деформації можна подати в інваріантному вигляді [2,8] як

$$dW_\varepsilon = 3V\sigma d\varepsilon + V\sigma_i d\varepsilon_i , \tag{37}$$

де σ і ε – середні значення напружень і деформацій, які спричиняють зміну об'єму матеріалу; σ_i і ε_i – інтенсивність напружень і деформацій, які зумовлюють зміну форми матеріалу.

2. Варіант, коли матеріал працює в умовах пружних деформацій, але при дії високої температури $T > 300^0 C$. Цей випадок схематично показаний фрагментами α двох діаграм (рис. 1), з яких видно, що з трьох механічних потенціалів залишається тільки один у вигляді (23), бо кристалічна структура від механічного напруження, меншого за границю пропорціональності, не зазнає ніякого пошкодження. Баланс енерговмісту матеріалу для цього випадку набуде вигляду

$$dI = dU + P_C dV + dW_\sigma + 3V\sigma d\varepsilon + V\sigma_i d\varepsilon_i ; \tag{38}$$

$$dI = dF + TdS + P_C dV + dF_M + V\Delta\sigma_n d\varepsilon_{T1} + 3V\sigma d\varepsilon + V\sigma_i d\varepsilon_i ; \tag{39}$$

$$dI = dG + TdS + dG_M + V\Delta\sigma_n d\varepsilon_{T1} . \tag{40}$$

З цієї системи рівнянь можна визначати допустимі величини напружень або деформацій при заданій величині температури.

1. Браун Т., Лемей Г.Ю. Химия в центре наук: В 2 ч. М., 1988. 2. Гольденберг И.И., Бажанов В.Л., Копнов В.А. Длительная прочность в машиностроении. М., 1977. 3. Иванова В.С., Терентьев В.Ф. Природа усталости металлов. М., 1975. 4. Кириллин В.Л., Сычев В.В., Шейндлин А.Е. Техническая термодинамика. М., 1979. 5. Киттель Ч. Статистическая термодинамика. М., 1977. 6. Справочник машиностроителя / Под ред. Э.А. Сателя. М., 1964. Т. 6. 7. Физический энциклопедический словарь / Гл. ред. А.М. Прохоров. М., 1983. 8. Филин А.П. Прикладная механика твердого деформируемого тела: В 4 т. М., 1975.

УДК 512.64

ТЕОРЕМИ БЕЗУ І ВІЄТА ТА ЇХ УЗАГАЛЬНЕННЯ

Р.В. Коляда, І.О. Мельник

Досліджуються питання взаємозв'язку між розв'язками матричного рівняння і відповідними його коефіцієнтами та виділення унітального однорідного множника з однорідного матричного многочлена від двох змінних.

Исследуются вопросы взаимосвязи между решениями матричного уравнения и соответствующими его коэффициентами, выделения унитального однородного множителя из однородного матричного многочлена от двух переменных.

Розглянемо многочленну матрицю $\mathbf{A}(x)$ порядку n, записану у вигляді матричного многочлена

$$\mathbf{A}(x)=\mathbf{I}x^m+\mathbf{A}_1x^{m-1}+\ldots+\mathbf{A}_{m-1}x+\mathbf{A}_m.$$

Нехай $\Delta(x)=\det\mathbf{A}(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_{mn})$, $\alpha_i\neq\alpha_j$, при $i\neq j$.

Добуток $\mathbf{A}(x)=(x\mathbf{I}-\mathbf{B}_1)(x\mathbf{I}-\mathbf{B}_2)\ldots(x\mathbf{I}-\mathbf{B}_m)$, де $\Delta(x)=\Delta_1(x)\Delta_2(x)\ldots\Delta_m(x)$, $\Delta_i(x)=det(x\mathbf{I}-\mathbf{B}_i)$, $i=1,2,\ldots,m$ називається розкладом матричного многочлена $\mathbf{A}(x)$ на квазіперестановочні множники, якщо для кожного розкладу $\Delta(x)=\Delta_{i_1}(x)\Delta_{i_2}(x)\ldots\Delta_{i_m}(x)$, де $(i_1,i_2,\ldots,i_m)$ будь-яка перестановка індексів $(1,2,\ldots,m)$, існує паралельний розклад $\mathbf{A}(x)=(x\mathbf{I}-\mathbf{C}_{i_1})(x\mathbf{I}-\mathbf{C}_{i_2})\ldots(x\mathbf{I}-\mathbf{C}_{i_m})$, де $\Delta_{i_j}(x)=\det(x\mathbf{I}-\mathbf{C}_{i_j})$, $j=1,2,\ldots,m$.

Оскільки навіть матричне квадратне рівняння $\mathbf{X}^2+\mathbf{X}\mathbf{A}_1+\mathbf{A}_2=\mathbf{0}$ може мати багато розв'язків, то формули Вієта не можуть мати прямого узагальнення на матричні рівняння. Але наступна теорема дещо нагадує формули Вієта і встановлює зв'язок між слідами і визначниками коефіцієнтів матричного унітального квадратного тричлена та слідами і визначниками розв'язків відповідного матричного рівняння.

Теорема 1. Нехай $\mathbf{A}(x)=\mathbf{I}x^2+\mathbf{A}_1x+\mathbf{A}_2$ – матричний унітальний квадратний тричлен порядку n з попарно різними характеристичними коренями, $\Delta(x)=\det\mathbf{A}(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_{2n})$, $\alpha_i\neq\alpha_j$, при $i\neq j$.

Якщо $\mathbf{X}_1=\mathbf{B}_1$, $\mathbf{X}_2=\mathbf{B}_2$ – розв'язки рівняння $\mathbf{X}^2+\mathbf{X}\mathbf{A}_1+\mathbf{A}_2=\mathbf{0}$, то $Sp(\mathbf{B}_1+\mathbf{B}_2)=-Sp\mathbf{A}_1$, $\det(\mathbf{B}_1\mathbf{B}_2)=\det\mathbf{A}_2$.

Доведення теореми отримуємо, врахувавши з роботи [3] те, що матричний квадратний тричлен з попарно різними характеристичними коренями розкладається в добуток квазіперестановочних множників.

Розглянемо квадратну многочленну матрицю $\mathbf{A}(x, y)$ порядку n від двох змінних x та y вигляду

$$A(x, y) = A_0 x^m + A_1 y x^{m-1} +\ldots+ A_{m-1} y^{m-1} x + A_m y^m,$$

$\det\mathbf{A}_0\neq 0$, $\mathbf{A}_m\neq O$, яку називатимемо [1] однорідним матричним многочленом степеня m.

Як аналог узагальненої теореми Безу маємо

Теорема 2. При правому (лівому) діленні однорідного матричного многочлена A(x, y) на $I x - B y$, тобто $A(x, y) = C(x, y)(I x - B y) + R$ ($A(x, y) = (I x - B y) C(x, y) + \hat{\mathbf{R}}$), остача R ($\hat{\mathbf{R}}$) дорівнює

$$R = A_0 B^m + A_1 B^{m-1} +\ldots+ A_m \quad (\hat{\mathbf{R}} = B^m A_0 + B^{m-1} A_0 +\ldots+ A_m).$$

Наслідок 1. Розклад

$A(x, y) = C(x, y) (I x - B y)$ $\qquad$ $(A(x, y) = (I x - B y) C(x, y))$

має місце тоді і тільки тоді, коли $Z = B$ є розв'язком матричного рівняння

$$\mathbf{A}_0 \mathbf{Z}^m + \mathbf{A}_1 \mathbf{Z}^{m-1} +\ldots+ \mathbf{A}_m = 0 \quad (\mathbf{Z}^m \mathbf{A}_0 + \mathbf{Z}^{m-1} \mathbf{A}_1 +\ldots+\mathbf{A}_m = 0).$$

Розглянемо наступну систему r матричних рівнянь

$$\begin{cases} \sum_{\gamma=1}^{m-r+1} (\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2, \cdots, \mathbf{Z}_r)^{\gamma} \mathbf{A}_{m-r-\gamma+1} + \mathbf{A}_{m-r+1} = 0, \\ \sum_{\gamma=2}^{m-r+2} (\mathbf{Z}_2, \cdots, \mathbf{Z}_r, \mathbf{Z}_1)^{\gamma} \mathbf{A}_{m-r-\gamma+2} + \mathbf{A}_{m-r+2} = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \sum_{\gamma=r}^{m} (\mathbf{Z}_r, \mathbf{Z}_1, \cdots, \mathbf{Z}_{r-1})^{\gamma} \mathbf{A}_{m-\gamma} + \mathbf{A}_{m1} = 0, \end{cases}$$

де $\mathbf{A}_0$, $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_m$ – задані матриці порядку n, елементи яких є комплексними числами, $\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2, \ldots, \mathbf{Z}_r$ – невідомі $n \times n$-матриці.

Утворимо з коефіцієнтів $\mathbf{A}_0$, $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_m$ цієї системи матричних рівнянь матричний многочлен

$$\mathbf{A}(x) = \mathbf{A}_0 x^m + \mathbf{A}_1 x^{m-1} + \ldots + \mathbf{A}_{m-1} x + \mathbf{A}_m .$$

В позначеннях системи r матричних рівнянь отримуємо рівносильність її розв'язання виділенню лівого однорідного множника

$$B(x, y) = I x^r - B_1 y x^{r-1} + \ldots - B_r y^r$$

з однорідного матричного многочлена

$$A(x, y) = A_0 x^m + A_1 y x^{m-1} + \ldots + A_{m-1} y^{m-1} x + A_m y^m.$$

Теорема 3. Система r матричних рівнянь має розв'язок $X_1=B_1$, $X_2=B_2$, ..., $X_r=B_r$ тоді і тільки тоді, коли для однорідного матричного многочлена $A(x, y)$ має місце розклад

$$A(x, y) = (I x^r - B_1 y x^{r-1} - \ldots - B_r y^r)\, C(x, y).$$

Для доведення теорем 2 і 3 використовуються результати роботи [2] з врахуванням заміни $x = t\,y$. Аналогічно розглядається відповідна система r матричних рівнянь, розв'язність якої рівносильна виділенню з однорідного матричного многочлена $A(x, y)$ від двох змінних x та y правого однорідного множника.

Виявилося [4], що узагальнена теорема Безу справедлива для просторових виміру $p > 2$ матричних многочленів: *При правому (лівому)* (λ, μ)*-діленні p-матричного многочлена* $F(x)$ *на p-матричний біном* $xI(\lambda, \mu) - A$ *права (ліва)* (λ, μ)*-згорнена остача дорівнює* $F(A)$ ($\hat{\mathbf{F}}(\mathbf{A})$).

Наслідок 2. Праве (ліве) (λ, μ)-ділення многочлена $F(x)$ на біном $xI(\lambda, \mu) - A$ тоді і тільки здійснюється без остачі, коли $F(A)=0$ ($\hat{\mathbf{F}}(\mathbf{A})=0$).

1. Коляда Р.В., Мельник О.М. Факторизація однорідних многочленних матриць від двох змінних // Сучасні проблеми математики. Матеріали міжнар. конф. Ч. 1. Чернівці–Київ, 1998. 2. Мельник О.М. Дослідження однієї системи матричних рівнянь // Доповіді АН УРСР. Сер. А., 1981, № 1. С. 20–21. 3. Петричкович В.М. Разложимость матричного квадратного трёхчлена на линейные множители и его приводимость к блочным видам //Материалы II конф. мол. ученых ЗНЦ АН УССР. Секция матем. наук. Ужгород, 1975. / Деп. в ВИНИТИ 18.05.76, № 1734–76. 4. Соколов Н.П. Введение в теорию многомерных матриц. К., 1972.