$$H^{(S)} = \log_b W \,. \tag{8}$$

Порівнюючи вирази (7) і (8), бачимо, що шеннонівська і больцманівська ентропії пропорціональні одна одній –

$$S^{(b)} = \text{const}\, H^{(S)} \,. \tag{9}$$

Викладене дає підстави повністю зняти з поняття ентропії абстрактність, навколо якої виникали деякі непорозуміння серед філософів при обговоренні "теплової смерті Всесвіту". Всесвіт є відкритою термодинамічною системою, до якої застосовується ентропія Клаузіуса (5).

Насамкінець, не буде зайвим навести точку зору видатного фізика Е. Шредінгера [2], який, характеризуючи поведінку речовини в ізольованій системі, вважає, "якщо неживу систему ізолювати або помістити в однорідні умови, то всякий рух з бігом часу призупиняється внаслідок різного роду взаємного тертя між частинками. Різниця електричних і хімічних потенціалів між частинками вирівнюється. Речовини, які мають тенденцію до утворення хімічних сполук, утворюють їх, і температура в середині системи вирівнюється за рахунок теплопровідності. Згодом система в цілому згасає і перетворюється в мертву масу матерії. При цьому досягається стан, в якому не відбувається ніяких помітних подій". Учений називає цей стан термодинамічною рівновагою або станом максимальної ентропії. Зрозуміло, що тут йдеться про ентропію Больцмана, а не Клаузіуса.

На підставі вищевикладеного констатуємо, що поведінка ентропії в закритій чи відкритій системах принципово відрізняється від її поведінки в ізольованій системі [3]. Зауважимо, що в ізольованій системі наявний адіабатно-ізобарно-ізотермічний стан речовини, при якому теплообмін відсутній, тому величини ізобарної й ізохорної теплоємностей, а також ентропія зберігають свої "заморожені" числові значення, що характеризують омертвілу масу матерії. Отже, в ізольованій системі всякий процес відсутній, а саме поняття системи штучне, бо в природі ізольованих систем не існує.

1. Вукалович М.П. Таблицы термодинамических свойств воды и водяного пара. М.-Л., 1965. 2. Кубо Р. Термодинамика. М., 1970. 3. Физический энциклопедический словарь. / Под. ред. А.И. Прохорова. М., 1983.

УДК 539. 377

В.М. Флячок, Є.М. Федюк

ВАРІАЦІЙНА ПОСТАНОВКА ДИНАМІЧНИХ ЗАДАЧ ТЕРМОПРУЖНОСТІ З ДИСТОРСІЯМИ

Показано, що динамічна крайова задача термопружності неоднорідного анізотропного тіла з дисторсіями допускає відповідну варіаційну постановку.

Показано, что динамическая краевая задача термоупругости неоднородного анизотропного тела с дисторсиями допускает соответствующую вариационную постановку.

Варіаційні принципи спряженої термопружності досліджувалися багатьма науковцями, зокрема [1, 2, 3]. Інтегральний варіаційний принцип для однорідного ізотропного середовища розглядав Качковський [3]. У даній статті описано пиширення цього принципу на неоднорідні анізотропні середовища з урахуванням початкових деформацій.

Формулювання крайової задачі. Розглянемо неоднорідне анізотропне деформівне тіло об'єму V, обмежене поверхнею Σ; точки простору тіла віднесені до прямокутної декартової системи координат $x_s\ (s=1,2,3)$. Нехай у момент часу τ під дією зовнішніх об'ємних сил $X_i(x_s,\tau)$, внутрішніх джерел тепла $w^t(x_s,\tau)$, тензора дисторсій $e^0_{ij}(x_s,\tau)$, а також навантаження, заданого на граничній поверхні, у тілі виникнуть: поля переміщень $u_i(x_s,\tau)$, температурне поле $t(x_s,\tau)$, потоки тепла $q_i(x_s,\tau)$, деформації $e_{ij}(x_s,\tau)$ і напруження $\sigma_{ij}(x_s,\tau)$.

Якщо допустити, що перераховані функції мають відповідні властивості гладкості, то термопружний процес у неоднорідному анізотропному тілі описується певними рівняннями [1,2].

В області V при $\tau > 0$:

рівняннями руху $\sigma_{ij,j} + X_i = \rho(x_s)\ddot{u}_i$, $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$; (1)

балансовими рівняннями $-q_{i,j} - C_e(x_s)\dot{t} - T_0\beta_{ij}(x_s)(\dot{e}_{ij} - \dot{e}^0_{ij}) + w^t = 0$; (2)

рівняннями теплопровідності $q_i = -\lambda_{ij}(x_s)t_{,j}$. (3)

В області V при $\tau \geq 0$:

геометричними співвідношеннями $e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$; (4)

рівняннями стану $\sigma_{ij} = A_{ijkl}(x_s)e_{kl} - \beta_{ij}(x_s)t$. (5)

В області V при $\tau = 0$:

початковими умовами $t(x_s,0) = t^0(x_s)$; $u_i(x_s,0) = u_i^0(x_s)$; $\dot{u}_i(x_s,0) = u_i^*(x_s)$. (6)

На поверхні Σ при $\tau \geq 0$:

граничними умовами $\sigma_{ij}n_j = \sigma_i$; $q_i n_i = q_n$. (7)

Тут $A_{ijkl}(x_s)$ – ізотермічні компоненти тензора жорсткості анізотропного тіла; $\beta_{ij}(x_s)$ – компоненти тензора термопружності; $C_e(x_s)$ – теплоємність при сталій деформації; $\lambda_{ij}(x_s)$ – компоненти тензора теплопровідності; T_0 – абсолютна температура; n_i – компоненти одиничного вектора нормалі до граничної поверхні.

Сформульована крайова задача допускає варіаційну постановку в різних формах. Розглянемо одну з них.

Інтегральний варіаційний принцип. Уведемо нові функції H_i, V^t, G за формулами

$$T_0\dot{H}_i = q_i;\quad \dot{V}^t = w^t;\quad T_0\dot{G} = t\ .$$

Тоді з рівнянь (3) одержимо

$$q_i = -\lambda_{ij}(x_s)t_{,j} = T_0\dot{H}_i = -\lambda_{ij}(x_s)T_0\,\dot{G}_{,j};\quad G_{,j} = -k_{ij}(x_s)H_i\quad \left(k_{ij} = \lambda_{ij}^{-1}\right). \tag{8}$$

Розглянемо неперервну послідовність миттєвих термопружних станів тіла між двома фіксованими моментами часу τ_1 і τ_2. Піддамо варіюванню функції u_i і G, вважаючи, що в початковий і кінцевий моменти інтервалу, що розглядається, варійований стан збігається з дійсним, тобто $\left[\delta u_i, \delta G\right]_{\tau_1}^{\tau_2} = 0$. Помножимо рівняння (1) на δu_i, а рівняння (2) – на δG і зінтегруємо суму цих добутків за об'ємом тіла V і часом τ, застосовуючи інтегрування частинами і формулу Остроградського–Гауса. Використовуючи далі співвідношення (5) і (8), одержимо варіаційне рівняння для задач динаміки спряженої термопружності анізотропного тіла з початковими деформаціями.

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2}(\delta F - \delta K + \delta D)d\tau =$$

$$= \int_{\tau_1}^{\tau_2}\left\{\int_V (X_i\,\delta u_i + V^t\,\delta G)dV + \int_\Sigma (\sigma_i\,\delta u_i - q_n\,\delta G)d\Sigma\right\}d\tau +$$

$$+ \int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_V \left\{A_{ijkl}(x_s)e^0_{kl}\,\delta e_{ij} - \beta_{ij}(x_s)e^0_{ij}\,\delta t\right\}dV\,d\tau. \tag{9}$$

Тут
$$F = \frac{1}{2} A_{ijkl}(x_s) e_{ij} e_{kl} - \beta_{il}(x_s) e_{ij} t - \frac{C_e(x_s)}{2T_0} t^2$$

$$K = \frac{1}{2} \int_V \rho(x_s) \dot{u}_i \dot{u}_i dV; \qquad D = \frac{1}{2} \int_V T_0 k_{ij}(x_s) \dot{H}_i \dot{H}_j dV.$$

Якщо знехтувати спряженістю температурного й деформаційного полів і вважати попередньо задоволеним рівняння (2), то з (9) одержимо принцип Гамільтона для динаміки незв'язаної термопружності з дисторсіями. Коли попередньо задовольнити рівняння (1), то отримаємо варіаційні рівняння нестаціонарної теплопровідності.

Варіаційне рівняння (9) можна використати для побудови розв'язків крайових задач термопружності, застосовуючи метод узагальнених координат або скінчених елементів.

1.Новацкий В. Теория термоупругости. М., 1975. 2. Флячок В.М., Швець Р.М. Про варіаційні задачі узагальненої термопружності неоднорідних анізотропних тіл // Мат. методи і фіз.-мех поля. 1999. Т. 42. № 3. С. 149–153. 3. Kaczkowski Z. On variational principles in thermoelastisity // Bull. Akad. Pol. Sci., Ser. Techn. 1982. T. 30. № 5–6. p. 245–250.