

УДК 681.5.015+62.52

*Б. В. Дурняк, М. М. Луцків, І. М. Хмельницька*  
*Українська академія друкарства*

## **МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ НАТЯГУ В ПОСЛІДОВНО З'ЄДНАНИХ СТРІЧКОПРОВІДНИХ ДІЛЯНКАХ ПРИ НЕСТАЦІОНАРНОМУ РЕЖИМІ РОБОТИ**

*Розглядається задача побудови математичної моделі натягу в послідовно з'єднаних стрічкопровідних ділянках як нестационарного об'єкта регулювання, обумовленого зміною швидкості руху стрічки в широких межах, подано результати комп'ютерного симулювання.*

*Математичне моделювання, натяг, стрічкопровідна ділянка*

У паперовій, текстильній, хімічній, поліграфічній та інших галузях промисловості широко використовуються ротаційні багатосекційні машини, в яких на рухомому стрічковому матеріалі послідовно виконуються різні технологічні операції. Для підвищення точності їх виконання стрічкопровідні системи обладнуються системами автоматичного управління швидкості і натягу стрічкового матеріалу, автоматичного суміщення технологічних операцій та іншими. Швидкість руху стрічки у рулонних ротаційних друкарських машинах сягає 10–15 м/с. Машину запускають на малій швидкості та поступово розганяють з певним темпом до робочої швидкості. Отже, стрічкопровідна система машини працює у нестационарному режимі, обумовленому зміною швидкості. З досвіду роботи рулонних друкарських машин відомо, що при запуску їх значно погіршується якість виробів, можуть з'явитися бракована продукція та обриви стрічкового матеріалу, що призводить до аварійного режиму та вимушеної зупинки машини, втрат робочого часу і матеріалів.

Традиційні системи автоматичного регулювання натягу і суміщення технологічних операцій не здатні забезпечити роботу машини в нестационарному режимі. Тому досить часто системи автоматичного управління виключають на час виведення машини на робочу швидкість. Це обумовлено тим, що стрічкопровідна система є складною динамічною, із змінними параметрами, які залежать від швидкості роботи машини. Існуючі моделі стрічкопровідних систем побудовані так, що швидкість руху стрічки є сталою [4, 6, 7], отож є неповними, що обмежує їх можливості та унеможливає створення ефективних систем автоматичного управління стрічкопровідними системами. Тому виникає актуальна проблема побудови математичної моделі натягу в послідовно з'єднаних ділянках як нестационарного об'єкта регулювання, обумовленого зміною швидкості руху стрічки в широких межах.

У зв'язку з підвищенням вимог до якості готової продукції і робочих швидкостей ротаційних машин математичний опис стрічкопровідних систем стає одним із найважливіших етапів аналізу та проектування рулонних друкарських машин і систем управління ними. Вибір і розробка математичного опису набуває принципового значення, тому що побудована модель визначає можливості аналізу та синтезу ефективних систем управління.

Математичні моделі стрічкопровідних систем побудовані на основі лінійного диференціального рівняння натягу рухомої стрічки на ділянці за умови, що швидкість руху стрічкового матеріалу є сталою [4, 6, 7], тому моделі не описують нестационарні режими роботи при пуску машини і виведені на робочу швидкість.

У багатьох публікаціях [4, 6] відзначається, що стрічкопровідні системи рулонних ротаційних машин є складними, із змінними параметрами. Фізичними змінними параметрами є лінійна швидкість руху стрічки, радіус і момент інерції рулону, з якого розмотується або на який намотується стрічковий матеріал. Окремі механізми й елементи стрічкопровідних систем описуються лінійними диференціальними рівняннями, які містять ці параметри, і фігурують там як сталі величини ( $V, J, R$  і т.п.).

Зазвичай у теорії автоматичного керування до класу об'єктів і систем із змінними параметрами, які ще іменуються нестационарними, відносять об'єкти, що описуються лінійними диференціальними рівняннями в повних похідних, де коефіцієнти є функціями часу  $\alpha_i(t)$ , тобто змінними у часі. Тому зазначені вище моделі елементів стрічкопровідних систем не можна віднести до моделей із змінними параметрами, оскільки вони описуються лінійними диференціальними рівняннями із сталими коефіцієнтами, які не є функціями часу.

У працях [4, 6, 7] зображено ряд структурних схем моделей елементів стрічкопровідної системи, в яких ті чи інші параметри представлено функціями окремих змінних. У моделі рулон — стрічкопровідна ділянка коефіцієнт передачі подано як функцію параметрів  $k = f_1(R, J, \alpha)$ , стала часу  $T = f_2(R, J, \alpha, V)$ , де  $R, J$  — радіус і момент інерції рулону,  $V$  — лінійна швидкість,  $\alpha$  — коефіцієнт тертя. Наведено графіки перехідних характеристик моделей для окремих заданих параметрів, які не в повній мірі характеризують їх динамічні властивості як нестационарних об'єктів.

Основним параметром, який характеризує динамічні властивості стрічкопровідних систем, є стала часу стрічкопровідної ділянки  $T = L/V$ , де  $L$  — відстань між стрічкопровідними циліндрами. При запуску машини швидкість поступово змінюється в часі від нуля до робочої швидкості. Отже, стала часу буде змінюватись у досить широких межах ( $0 \leq T \leq T_H$ ).

З викладеного випливає актуальність поставленої задачі побудови математичної моделі натягу в послідовно з'єднаних стрічкопровідних ділянках при нестационарному режимі роботи.

Метою роботи є опрацювання моделі натягу в послідовно з'єднаних стрічкопровідних ділянках як нестационарного об'єкта при зміні швидкості руху, побудова симулятора й аналіз динамічних властивостей.

Розглянемо стрічкопровідну систему ротаційної машини, в якій натягнутий стрічковий матеріал приводиться в рух послідовно розміщеними стрічкопровідними циліндрами [4, 6, 7]. При побудові математичної моделі натягу стрічки на ділянці зробимо такі основні припущення [5, 7]:

розтяг матеріалу відбувається в межах пружної деформації, яка є лінійною;

рухома стрічка має натяг і не провисає на ділянці;

швидкість стрічкопровідних циліндрів однакова і може змінюватись у широких межах;

відсутнє проковзування стрічкового матеріалу в зонах контакту ведучих пар циліндрів;

нехтуємо вагою стрічки та її аеродинамічними властивостями на ділянці;

нехтуємо масою стрічкопровідних циліндрів.

При прийнятих припущеннях стрічкопровідну систему можна розглядати як послідовне з'єднання стрічкопровідних ділянок (рис. 1).

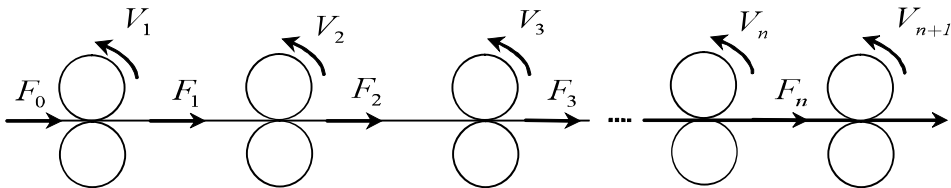


Рис.1. Схема стрічкопровідної системи

Загальна кількість стрічкопровідних циліндрів становить  $n+1$ , ділянок —  $n$ . Якщо лінійна швидкість усіх циліндрів є сталою, то при прийнятих припущеннях натяг стрічкового матеріалу на  $i$ -ій ділянці описується відомим лінійним диференціальним рівнянням натягу [4, 6, 7]:

$$T_i \frac{dF_i}{dt} + F_i = F_{i-1} + F_{0i}, \quad (1)$$

де  $F_i$  — натяг стрічки на даній ділянці;  $F_{i-1}$  — натяг стрічки на попередній ділянці, викликаний різними діями.

Стала часу стрічкопровідної ділянки обернено пропорційна швидкості

$$T_i = \frac{L_i}{V_i}, \quad (2)$$

де  $L_i$  — відстань між стрічкопровідними циліндрами;  $V_i$  — лінійна швидкість стрічки.

Як уже відзначалося, у нестационарному режимі при запуску машини швидкість стрічки змінюється від нуля до номінальної, а стала часу ділянки змінюватиметься від безмежності до номінальної сталої часу. Така велика зміна сталої часу стрічкопровідної ділянки, безумовно, впливатиме на динамічні властивості стрічкопровідної системи, що обумовлює розгляд стрічкопровідної

системи як об'єкта із змінними параметрами (нестационарного об'єкта). Припустивши, що сталі часу ділянки стрічки є змінними в часі параметрами, на основі теорії нестационарних систем управління [2, 8] з виразу (1) опишемо ділянку рухомої стрічки за допомогою диференціального рівняння в повних похідних вигляду

$$T_i(t) \frac{dF_i}{dt} + F_i = F_{i-1} + F_{0i}, \quad (3)$$

де функція  $T_i(t)$  та її похідна є неперервними.

Аналіз стрічкопровідної системи із змінними параметрами при детермінованих діях зводиться до розв'язку системи диференціальних рівнянь (3) із змінними коефіцієнтами. Зауважимо, що загальних аналітичних методів розв'язку не існує. Є невелика кількість часткових розв'язків для рівнянь не вище другого порядку [1, 2]. Тому в теорії автоматичного управління при аналізі нестационарних систем зазвичай використовують методи, основані на аналоговому і цифровому моделюванні. Для цього запишемо диференціальне рівняння (3) у символьній формі:

$$T(t)F_i p + F_i = F_{i-1} + F_{0i}. \quad (4)$$

Звідси запишемо диференціальне рівняння у символьній формі відносно вхідних і вихідних змінних:

$$F_i(t) = \left[ \frac{1}{T_i(t)p + 1} \right] [F_{i-1}(t) + F_{0i}(t)]. \quad (5)$$

Вираз показує, що вихід  $F_i(t)$  являє собою результат застосування деякого інтегрального оператора:

$$J = \frac{1}{T_i(t)p + 1}. \quad (6)$$

Відповідно до символьної алгебри [8] систему диференціальних рівнянь натягу (3) із змінними параметрами або відповідну йому систему рівнянь у символьному вигляді (5) можна подати структурною схемою послідовно з'єднаних інтегральних операторів (6) (рис. 2).

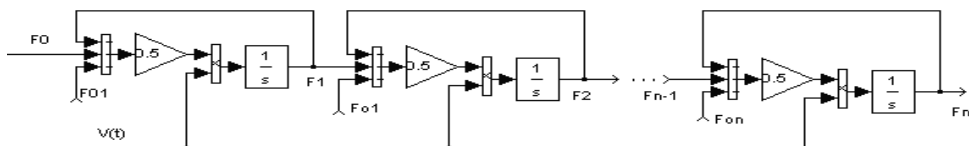


Рис. 2. Структурна схема моделі натягу послідовно з'єднаних стрічкопровідних ділянок із змінними параметрами

Для аналізу впливу швидкості стрічки на динаміку стрічкопровідної ділянки потрібно задавати сталі довжини  $L_i$  ділянок і швидкість як функцію часу  $V(t)$ .

Складання програми для цифрового моделювання стрічкопровідної системи в нестационарному режимі є трудомістким. Для спрощення цього завдання застосовано метод комп'ютерного симулювання за допомогою відомого програмного пакета MATLAB-Simulink, що є мовою програмування високого рівня, у котрому реалізується принцип об'єктно-орієнтованого (візуального) програмування, відповідно до якого користувач на екрані комп'ютера з бібліотеки блоків Simulink у вікні моделі створює графічну модель, за якою здійснюється комп'ютерне симулювання [3].

На основі структурної схеми рис. 2 у вікні моделі з операційних блоків побудовано симулятор натягу послідовно з'єднаних чотирьох ділянок із змінними параметрами (рис. 3).

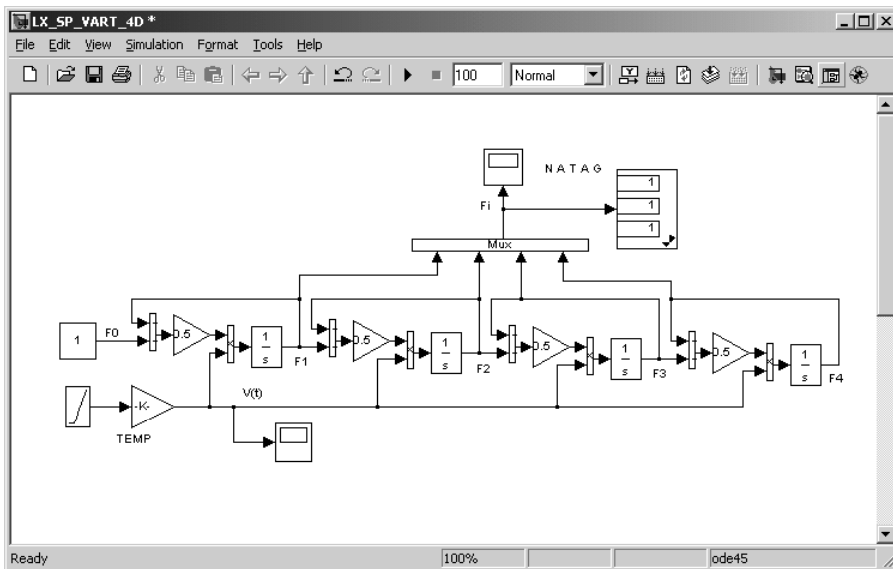


Рис. 3. Вікно симулятора натягу

Для побудови симулятора використано блоки додавання, множення та інтегрування. На вході симулятора блок *Constant* задає натяг стрічки на вході першої ділянки. Блок *Ramp* задає лінійно наростаючу швидкість руху із сталим прискоренням  $a = 1 \text{ м/с}^2$ , а блок *Gain* — бажаний темп розгону стрічки. Довжини ділянок задаються у діалогових вікнах блоків *Gain*. Візуалізація результатів симулювання здійснюється блоком *Scope*. Симулятор паралельно обчислює натяг стрічки на чотирьох ділянках для двох стрічкопровідних систем при зміні лінійної швидкості стрічки із заданими темпами.

Метою комп'ютерного симулювання було ілюстрування запропонованого підходу до аналізу динаміки натягу стрічкопровідної системи в нестационарному режимі роботи при подачі на вході ступеневого натягу.

Для прикладу здійснювали комп'ютерне симулювання натягу у послідовно з'єднаних чотирьох стрічкопровідних ділянках із змінними параметрами.

Задавали такі дані: довжина ділянок стрічки  $L_i = 2 \text{ м}$ ; натяг стрічки на вході першої ділянки  $F_0 = 1 \text{ Н}$ ; лінійно наростаюча швидкість руху стрічки із сталим прискоренням  $a = 0,01 \text{ м/с}^2$  ( $V(t) = 0,01t$ ).

Результати симулювання подано у вигляді перехідних характеристик нестационарної стрічкопровідної системи при дії на вході одиничного ступеневого натягу (рис. 4).

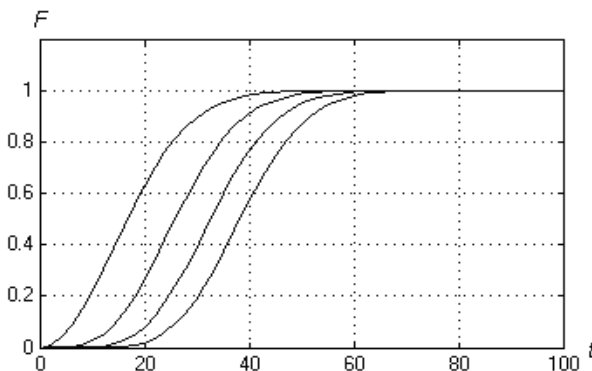


Рис. 4. Перехідні характеристики нестационарної стрічкопровідної системи

Як бачимо, перехідні процеси на ділянках відповідають процесам, які протікають в інерційних ланках вищих порядків. Із збільшенням кількості ділянок інерційність стрічкопровідної системи значно зростає. Проведений аналіз показав, що динаміка стрічкопровідної ділянки в нестационарному режимі роботи може бути описана передавальною функцією інерційної ланки третього порядку

$$W_i(s) = \frac{1}{(T_i s + 1)^3}. \quad (7)$$

Стала часу  $T_i$  залежить від темпу розгону стрічкопровідної системи і місця її розміщення. Для прикладу, при заданих параметрах нестационарної стрічкопровідної системи визначено передавальні функції ділянок:

$$\begin{aligned} W_1(s) &= \frac{1}{(6s + 1)^3}; & W_2(s) &= \frac{1}{(2.8s + 1)^3}; \\ W_3(s) &= \frac{1}{(2s + 1)^3}; & W_4(s) &= \frac{1}{(2s + 1)^3}. \end{aligned} \quad (8)$$

Звідси передавальна функція стрічкопровідної системи з чотирьох послідовно з'єднаних ділянок

$$W(s) = \frac{1}{(6s + 1)^3 (2.8s + 1)^3 (2s + 1)^3 (2s + 1)^3}. \quad (9)$$

Отже, стрічкопровідна система є інерційним об'єктом дванадцятого порядку.

Для практичних застосувань передавальної функції стрічкопровідної системи, залежно від кількості ділянок, можна апроксимувати за допомогою інерційної ланки другого порядку і ланки із запізненням:

$$\begin{aligned} W_1(s) &= \frac{1}{(8s+1)^2} e^{-3s}; & W_{12}(s) &= \frac{1}{(8s+1)^2} e^{-11s}; \\ W_{123}(s) &= \frac{1}{(8s+1)^2} e^{-19s}; & W_{1234}(s) &= \frac{1}{(8s+1)^2} e^{-23s}. \end{aligned} \quad (10)$$

Час перехідного процесу на ділянках, який визначає інерційність стрічкопровідної системи, залежить від темпу наростання швидкості і для прийнятих параметрів складає  $t_n = 50, 60, 65$  с. Зауважимо, що після закінчення перехідного процесу швидкість руху стрічки продовжує далі збільшуватися. Отже, перехідні процеси відбуваються на початковій стадії розгону стрічкопровідної системи.

У другій серії симулювання досліджували вплив темпу зростання швидкості при пуску і розгоні стрічкопровідної ділянки на її динамічні властивості. Задавали попередні параметри моделі і лінійно наростаючу швидкість руху стрічки з різним темпом наростання із сталими прискореннями  $a = 0,1\text{м/с}^2$  і  $0,01\text{м/с}^2$ .

Результати другої серії комп'ютерного симулювання подано у вигляді графіків зміни швидкості у часі (рис. 5) і перехідних характеристик нестационарної стрічкопровідної системи для різних темпів наростання швидкості (рис. 6).

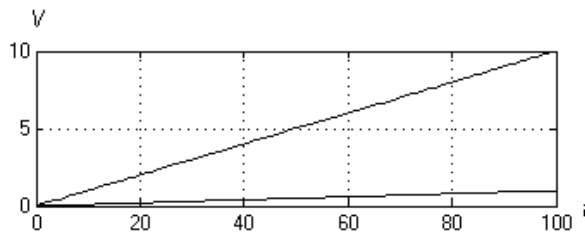


Рис. 5. Залежність зміни швидкості у часі

При розгоні стрічкопровідної системи із сталим прискоренням  $a = 0,1\text{м/с}^2$  перехідні процеси на ділянках завершуються за час  $t_n = 15; 17,5; 20; 22$  с. При зменшенні темпу розгону на ділянках перехідні процеси сповільнюються і закінчуються за час  $t_n = 50; 55; 60; 65$  с. Десятикратне зменшення темпу наростання швидкості збільшує час перехідного процесу майже в три рази. При прискоренні  $a = 0,1\text{м/с}^2$  перехідні процеси закінчуються при швидкості  $V = 2$  м/с, а при зменшенні його до  $0,01\text{м/с}^2$  — при швидкості  $0,7\text{м/с}^2$ .

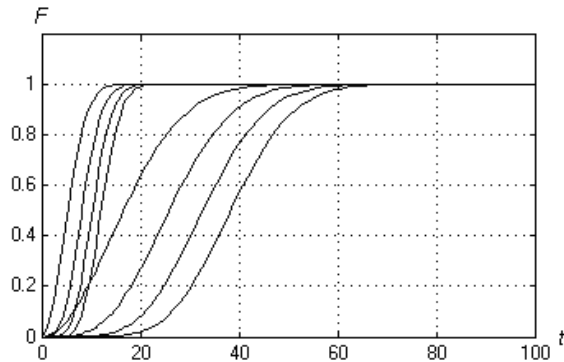


Рис. 6. Перехідні характеристики нестационарної стрічкопровідної системи при прискоренні  $a = 0,1 \text{ м/с}^2$  і  $0,01 \text{ м/с}^2$

У нестационарному режимі роботи швидкість протікання переходного процесу в стрічкопровідній системі значно залежить від темпу наростання швидкості. Зміна натягу стрічки відбувається тільки на початковому етапі розгону і закінчується при швидкості, значно меншій від номінальної. Отже, у нестационарному режимі роботи час переходного процесу в стрічкопровідній системі може змінюватись у досить широких межах, що потрібно враховувати при розробці систем автоматичного регулювання натягу стрічкового матеріалу.

З практичного досвіду відомо, що при пуску і виведенні на робочу швидкість рулонних друкарських машин досить часто спостерігається обрив стрічкового матеріалу. Однією з причин цього може бути збільшення інерційності стрічкопровідної системи при пуску і розгоні машини. Якщо система автоматичного регулювання натягу синтезована за умови, що стрічкопровідна ділянка є стаціонарним об'єктом регулювання, то при пуску і розгоні машини в системі можуть виникати значні перерегулювання натягу, а в результаті обрив стрічкового матеріалу.

З вищевикладеного можна зробити наступні висновки:

1. Стрічкопровідні системи рулонних ротаційних машин є складними динамічними системами із змінними параметрами, які залежать від швидкості роботи машини.

2. Існуючі моделі стрічкопровідних систем побудовані таким чином, що швидкість руху стрічкового матеріалу є сталою, тому вони не описують нестационарні режими роботи при пуску і виведенні машини на робочу швидкість, що обмежує їх можливості при аналізі та синтезі ефективних систем автоматичного управління.

3. Запропоновано математичну модель натягу послідовно з'єднаних стрічкопровідних ділянок із змінними в часі параметрами, як нестационарного об'єкта, у вигляді системи диференціальних рівнянь у повних похідних та подано їх у символічній формі.

4. Розроблено структурну схему моделі натягу послідовно з'єднаних стрічкопровідних ділянок із змінними параметрами.



5. Побудовано симулятор натягу послідовно з'єднаних чотирьох ділянок із змінними параметрами, який паралельно здійснює натяг стрічки на ділянках при зміні її лінійної швидкості із заданим темпом і здійснює візуалізацію результатів симулювання, що зручно для досліджень.

6. Результати симулювання подано у вигляді множини перехідних характеристик нестационарної стрічкопровідної системи.

7. Встановлено, що динаміку стрічкопровідної ділянки в нестационарному режимі роботи можна представити інерційною ланкою третього порядку, стала часу якої залежить від темпу розгону та місця її розміщення, а стрічкопровідну систему з чотирьох ділянок — інерційною ланкою дванадцятого порядку.

8. Для практичних застосувань передавальні функції нестационарної стрічкопровідної системи залежно від числа ділянок можна апроксимувати за допомогою інерційної ланки другого порядку і ланки із запізненням.

9. Після закінчення перехідного процесу швидкість руху стрічки продовжує далі наростати, отже, перехідні процеси відбуваються на початковій стадії розгону стрічки.

1. Алфёров С. М. О приближенном интегрировании линейных дифференциальных уравнений с переменным коэффициентом. Вопросы теории автоматического регулирования / С. М. Алфёров. — М.: Оборонгиз. 1956. 2. Василенко В. А. Инвариантные оптимальные линейные системы с переменными параметрами // Автоматическое управление и вычислительная техника. — 1961. Вып. 4. — М.: Машгиз. — С. 258–268. 3. Гуляев А. Визуальное моделирование в среде MATLAB: учеб. курс. — СПб: Питер, 2000. — 432 с. 4. Дурняк Б. В. Стрічкопровідні системи рулонних ротаційних машин. Моделювання управління. — К.: Атіка, 2002. — 292 с. 5. Дурняк Б. Математична модель нестационарної стрічкопровідної ділянки / Б. Дурняк, М. Луцків, І. Хмельницька // Поліграфія і видавнича справа. — 2008. № 2(48). — С. 123–131. 6. Дурняк Б. В. Математичне моделювання і реалізація систем керування стрічкопровідними системами. / Б. В. Дурняк, О. В. Тимченко. — К.: Видавничий центр «Просвіта», 2003. — 232 с. 7. Луцків М. М. Системи автоматичного керування ротаційними машинами. — Л.: Фенікс, 2000. — 152 с. 8. Техническая кибернетика. Теория автоматического регулирования. Кн. 2. Ч. 2. — М.: Машиностроение. 1989.

## **МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НАПРЯЖЕНИЯ В ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНО СОЕДИНЕННЫХ ЛЕНТОПРОВОДЯЩИХ УЧАСТКАХ ПРИ НЕСТАЦИОНАРНОМ РЕЖИМЕ РАБОТЫ**

*Рассматривается задача построения математической модели натяжение в последовательно соединенных лентопроводящих участках как нестационарного объекта регулирования, обусловленного сменой скорости движения ленты в широких пределах, приводятся результаты компьютерного моделирования.*

## **MATHEMATICAL DESIGN OF NATYAGOU IN THE CONSISTENTLY UNITED STRICHCOPROVIDNIH AREAS AT UNSTATIONARY MODE WORKS**

*The task of construction of mathematical model of natyagou in the consistently united strichcoprovidnih areas is considered, as an unstationary object of adjusting conditioned by the change of rate of movement of ribbon in wide scopes, the results of computer simulation are given.*