

УДК 539.3

ДЕФОРМУВАННЯ БАГАТОШАРОВИХ ПЛИТ НА ЖОРСТКІЙ ОСНОВІ ПІД ДІЄЮ ЛОКАЛЬНОГО НАВАНТАЖЕННЯО. Г. Гуртовий¹, С. О. Тинчук¹, Л. С. Угрин²

¹Національний університет водного господарства та природокористування,
вул. Соборна, 11, Рівне, 33028, Україна

²Українська академія друкарства,
вул. Під Голоском, 19, Львів, 79020, Україна

Для дослідження напружено-деформованого стану (НДС) багатошарових плит на жорсткій основі застосовано уточнені моделі симетричного НДС. Розрахункова схема поперечно навантаженої плити утворюється симетричною до будовою плити відносно поверхні контакту її з основою. Навантаження на таку плиту подвійної товщини прикладається двосторонньо симетрично відносно її середньої поверхні. Це дає змогу моделювати тільки беззгинове деформування, що зменшує кількість невідомих і загальний порядок диференціювання розрахункової системи рівнянь. Ця схема моделює зсув без тертя на поверхні контакту плити з основою. Жорсткий контакт плити з основою моделюється введенням додаткового тонкого, але практично недеформованого прошарку.

Використані уточнені континуальні моделі враховують деформації поперечного зсуву та поперечного обтіснення у високих ітераційних наближеннях. Розглянуто два варіанти уточнених моделей. В першому варіанті функція навантаження задана явно, тоді як у другому варіанті вона замінена невідомою шуканою функцією обтіснення. Чисельно моделі реалізовані варіаційно-різницевим методом (ВРМ). Для отримання розрахункової системи алгебраїчних рівнянь ВРМ застосовано інтегрування варіаційного функціоналу Лагранжа на півкροці дискретизації з одночасним використанням лівих і правих різниць для перших похідних від функцій зсуву. Продемонстровано переваги другого варіанту уточненої моделі в задачах, де функція навантаження має розриви. Показано особливості НДС плит на жорсткій основі при дії локального розподіленого навантаження.

Ключові слова: багатошарова плита, уточнена модель, поперечний зсув, поперечне обтіснення, варіаційно-різницевий метод.

Постановка проблеми. Розрахунки на міцність та жорсткість різних однорідних та неоднорідних композитних, особливо багатошарових, покриттів зводяться до оцінки їх НДС як плит, що контактують із основою. Це стосується розрахунку дорожнього багатошарового одягу на достатньо жорстких мостових, тунельних та інших конструкціях транспортних споруд, захисних багатошарових покриттів плоских елементів конструкцій та деталей, функціональних покриттів

робочих поверхонь різного обладнання тощо. Тому достовірне визначення НДС багат шарових плит на жорстких основах при дії стаціонарного поперечного навантаження, зокрема і локального, є актуальною задачею.

Об'єднання матеріалів з ізотропними та трансверсально-ізотропними фізичними характеристиками в багат шаровий пакет дає змогу створювати багат функціональні конструкції. НДС таких конструкцій, зважаючи на їх структурну неоднорідність та відносно низьку поперечну жорсткість окремих шарів, суттєво пов'язаний з впливом деформацій поперечного зсуву та деформацій поперечного обтиснення. Тому актуальною є задача уточненого моделювання НДС плит, яка б враховувала ці види деформацій. Потрібно зазначити, що застосування класичної теорії пластин чи уточнених поперечно-зсувних моделей призводить до тривіально-нульового розв'язку для НДС поперечно навантажених плит на жорсткій основі.

Аналіз останніх досліджень та публікацій. У статтях [1, 2 та ін.] наведені уточнені моделі НДС, що враховують поперечні зсуви та поперечне обтиснення, зорієнтовані переважно на описання згинового НДС, тоді як у плитах на жорсткій основі переважає беззгинова складова НДС. Отже, потрібне використання уточненої моделі, яка б з високою точністю описувала беззгинову складову НДС плити на жорсткій основі.

У статті [3] запропоновано гіпотези та побудована спеціальна модель беззгинового деформування однорідної та шаруватої плити, яка в поєднанні з моделлю згинового деформування дає результати, що близькі до точного тривимірного розв'язку. У статтях [4, 5] розглянуті структурно-континуальні моделі НДС поперечно навантажених плит та досліджено точність та доцільність підходів до моделювання плит на жорсткій основі залежно від фізико-геометричних характеристик плит. У публікації [6] запропоновані моделі, застосовані для оцінки НДС плит з дефектами.

Мета статті — показати особливості НДС плит на жорсткій основі при дії локального навантаження за допомогою уточненого моделювання з використанням підходів [3–5].

Виклад основного матеріалу дослідження. Розглядається деформування прямокутної багат шарової плити, яка опирається на жорстку основу, у лінійно-пружній постановці. Шари плити — ізотропні та трансверсально-ізотропні, довільної, але сталої товщини. Замість реальної конструкції багат шарової плити (рис. 1а) варто розглядати розрахункову схему плити, яка утворена симетричною добудовою відносно поверхні контакту цієї плити з основою. Плита буде у цьому випадку двосторонньо симетрично навантаженою відносно серединної поверхні плити, а товщина плити збільшиться вдвоє $H = 2b_n$ (рис. 1, б). Водночас контакт плити з основою відповідає умовам проковзування без тертя (рис. 1, б). Жорсткий контакт плити з основою пропонується моделювати введенням додаткового абсолютно жорсткого тонкого прошарку h_0 (рис. 1, в).

Між шарами плити виконуються умови жорсткого контакту без проковзування. Проте, вводючи тонкі прошарки малої відносної жорсткості, можна без змін у постановці задачі розглядати й інші умови міжшарового контакту.

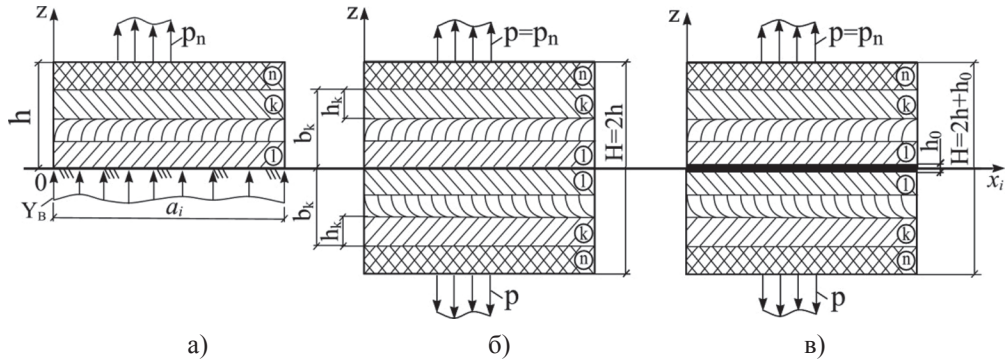


Рис. 1. Оптимізації розрахункової схеми плити

Такий підхід дає змогу оптимізувати розглянуту в [3] уточнену модель НДС плити, яка складалася з двох якісно відмінних НДС — згинового і беззгинового. Згинова складова НДС зникає, оскільки НДС в симетричній за структурою плиті при двосторонньому симетричному навантаженні повністю описується беззгиновим НДС. Як наслідок, кількість невідомих функцій і, відповідно, порядок диференціювання розрахункової системи рівнянь в задачі істотно зменшується.

В континуальній моделі [4] компоненти вектора нормальних $u_3^{(k)}$ та тангенціальних $u_i^{(k)}$ зміщень до координатної поверхні x_1, x_2 (рис. 1) представлені сумами добутків гіпотетично заданих степеневих функцій $\psi_t^{(k)}$, $\psi_{ir}^{(k)}$ поперечної координати z та шуканих функцій γ_t , β_{ir} і v_i координатної поверхні x_1, x_2 :

$$u_3^{(k)} = \psi_{3t,3}^{(k)}(z)\gamma_t + \psi_{33,3}^{(k)}(z)p; \quad t = \overline{1, 2}; \quad i = \overline{1, 2};$$

$$u_i^{(k)} = v_i - \psi_{3t}^{(k)}(z)\gamma_{t,i} - \psi_{33}^{(k)}(z)p_{,i} - \psi_{ir}^{(k)}(z)\beta_{ir}; \quad r = \overline{1, 4}, \quad (1)$$

де дві функції γ_t моделюють вплив поперечного обтиснення, а вісім функцій β_{ir} — вплив поперечного зсуву в четвертому наближенні по кожній змінній x_r , p — функція заданого навантаження. Тут і надалі диференціювання по x_a позначено нижніми індексами після коми, а також виконується підсумовування за нижніми індексами, що повторюються.

Модель (1) зручна в тих задачах, де функція навантаження $p(x_i)$ не має розривів першого і другого роду і так не суперечить принципу нерозривності зміщень $u_a^{(k)}$ і принципу диференціювання функцій. В аналітичних методах розрахунку модель (1) дуже ефективна [4]. Проте в задачах, де функція навантаження має розриви, необхідно замінити $p(x_i)$ в (1) невідомою функцією обтиснення. Отож далі реалізується також модель у вигляді:

$$u_3^{(k)} = \psi_{3t,3}^{(k)}(z)\gamma_t; \quad t = \overline{1, 3};$$

$$u_i^{(k)} = v_i - \psi_{3t}^{(k)}(z)\gamma_{t,i} - \psi_{ir}^{(k)}(z)\beta_{ir}. \quad (2)$$

Шукана функція $\gamma_3(x_i)$ — гладка і відповідає умовам нерозривності так само, як і функції $v_i, \gamma_1, \gamma_2, \beta_{ir}$.

Функції $\psi_{3t}^{(k)}, \psi_{ir}^{(k)}$, що моделюють розподіл зміщень за координатою z , мають вигляд [4]:

$$\begin{aligned} \psi_{3t,3}^{(k)} &= \int_0^z a_{3333}^{(s)} F_t^{(s)} dz; & \psi_{33,3}^{(k)} &= \int_0^z a_{3333}^{(s)} dz; & t &= \overline{1, 2}; & r &= \overline{1, 4}; \\ \psi_{ir}^{(k)} &= -\int_0^z a_{i3i3}^{(s)} f_{ir}^{(s)} dz; & \psi_l^{(k)} &= \int_0^z \psi_{l,3}^{(s)} dz; & s &= \overline{1, k}; & l &= \overline{1, 3}. \end{aligned} \quad (3)$$

У виразах (3) функції $F_t^{(k)}(z)$ апроксимують розподіл напруг поперечного обтиснення σ_{33} , а функції $f_{ir}^{(k)}(z)$ — напруг поперечного зсуву σ_{i3} по висоті плити. Вони детально описані в [4].

Систему розрахункових рівнянь для моделей (1) та (2) варіаційно-різницевим методом (ВРМ) отримано безпосередньо з умови мінімуму варіації потенційної енергії деформування. Тут застосовано варіаційний принцип Лагранжа

$$\delta U = \delta \Pi - \delta H = 0, \quad (4)$$

який у випадку плоскої деформації багатошарових плит виглядає так:

$$\delta U = \sum_{j=1}^N \iint_{S_j} \left\{ \int_{-h}^h [\sigma_{11} \cdot \delta \varepsilon_{11} + \sigma_{13} \cdot \delta \varepsilon_{13} + \sigma_{33} \cdot \delta \varepsilon_{33}] dz - p(2\psi_{3t,3}^{(n)}) \cdot \delta \gamma_t \right\} dS_j = 0, \quad (5)$$

де $\psi_{3t,3}^{(n)}$ — значення функції $\psi_{3t,3}^{(n)}$ при $z = h$ (рис.1, б) або $z = h + 0,5h_0$ (рис.1, в) для точок на поверхні плити.

Використовуючи в (5) дискретне представлення через скінченні різниці відносних деформацій $\varepsilon_{\alpha\beta}$, отриманих з (1) за співвідношеннями Коші, і напруг $\sigma_{\alpha\beta}$, отриманих за законом Гука, одержуємо систему розрахункових алгебраїчних рівнянь відносно вузлових значень невідомих функцій $v_i, \gamma_i, \beta_{ir}$ моделі (1).

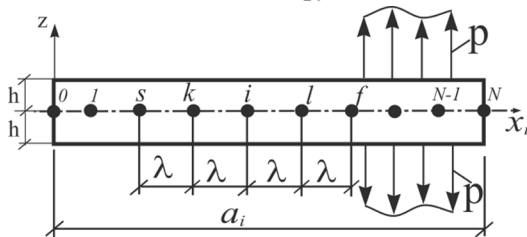


Рис. 2. Дискретна розрахункова схема плити в задачах ВРМ

Тут реалізується підхід, в якому інтегрування варіації функціонала повної енергії (5) виконується на кроці $\lambda / 2$ (рис. 2), з одночасним використанням як лівих (ліворуч від вузла), так і правих (праворуч від вузла) різниць для перших похідних від шуканих функцій.

Використання запропонованого підходу з лівими і правими різницями до функцій v_i і β_{ir} моделі (1) у функціоналі (5), для задачі плоскої деформації плити дало змогу отримати розрахункові рівняння ВРМ для вузла i в наступному вигляді (якщо дотримуватися нумерації вузлів із рис. 2):

а) для множників при варіації v_{i1} у вузлі i функції змішень v_1 в площині координатної поверхні $x_1 0x_2$:

$$\begin{aligned} B_0(-v_k + 2v_i - v_l)_1 / \lambda - B_{3t}(0,5\gamma_s - \gamma_k + \gamma_l - 0,5\gamma_f)_t / \lambda^2 - \\ - B_{1r}(-\beta_k + 2\beta_i - \beta_l)_r / \lambda + P_t(\gamma_k - \gamma_l)_t / 2 = 0; \end{aligned} \quad (6)$$

б) для множників при варіації γ_{it} функції поперечного обтиснення γ_i :

$$\begin{aligned}
 & -B_{3t}(0,5v_s - v_k + v_l - 0,5v_f)_1 / \lambda^2 + D_{qt}^{33}(\gamma_s - 4\gamma_k + 6\gamma_i - 4\gamma_l + \gamma_f)_t / \lambda^3 - \\
 & -H_{qt}^3(\gamma_k - 2\gamma_i + \gamma_l)_t / \lambda + D_{rt}^{13}(0,5\beta_s - \beta_k + \beta_l - 0,5\beta_f)_{1r} / \lambda^2 + \\
 & + P_t(v_k - v_l)_1 / 2 - J_{rt}^1(\beta_k - \beta_l)_{1r} / 2 - J_{qt}^3(\gamma_k - 2\gamma_i + \gamma_l)_t / \lambda + \\
 & + R_{qt}\gamma_{it}\lambda - p_i(2\overline{\psi}_{3t,3}^{(n)})\gamma_{it}\lambda = 0;
 \end{aligned} \tag{7}$$

в) для множників при варіації β_{i1r} функції поперечного зсуву β_{1r} :

$$\begin{aligned}
 & -B_{1r}(-v_k + 2v_i - v_l)_1 / \lambda + D_{1r}^{31}(0,5\gamma_s - \gamma_k + \gamma_l - 0,5\gamma_f)_t / \lambda^2 + \\
 & + D_{gr}^{11}(-\beta_k + 2\beta_i - \beta_l)_{1r} / \lambda - H_{1r}^1(\gamma_k - \gamma_l)_t / 2 + T_{gr}\beta_{i1r}\lambda = 0.
 \end{aligned} \tag{8}$$

Постійні коефіцієнти в системі розрахункових рівнянь (6)–(8) є узагальненими фізико-геометричними характеристиками плити і визначаються аналогічно коефіцієнтам розрахункової системи диференціальних рівнянь із [3, 4] у такий спосіб:

$$\begin{aligned}
 B_0 &= \int_{-b_n}^{b_n} A_{1111} dz; & B_{\varphi s} &= \int_{-b_n}^{b_n} A_{1111} \psi_{\varphi s} dz; & P_t &= \int_{-b_n}^{b_n} A_{1133} \psi_{3t,33} dz; \\
 D_{fs}^{\varphi\mu} &= \int_{-b_n}^{b_n} A_{1111} \psi_{\varphi f} \psi_{\mu s} dz; & J_{ft}^{\varphi} &= \int_{-b_n}^{b_n} A_{1133} \psi_{\varphi f} \psi_{3t,33} dz; & \varphi, \mu &= 1, 3; \\
 H_{is}^{\varphi} &= \int_{-b_n}^{b_n} A_{1133} \psi_{3t,33} \psi_{\varphi s} dz; & s, f &= \overline{1, 4}; & t, q &= \overline{1, 3}; \\
 R_{iq} &= \int_{-b_n}^{b_n} A_{3333} \psi_{3t,33} \psi_{3q,33} dz; & T_{rg} &= \int_{-b_n}^{b_n} G' \psi_{1r,3} \psi_{1g,3} dz; & r, g &= \overline{1, 4},
 \end{aligned} \tag{9}$$

де $A_{\alpha\beta\gamma\delta}$ — коефіцієнти закону Гука $\sigma_{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta\gamma\delta} e_{\gamma\delta}$; G' — модуль поперечного зсуву в шарі; b_n — координата z верхньої поверхні плити.

При дії на плиту локального навантаження з функцією $p(x_i)$, що має розрив першого роду, виконано порівняння точності (табл. 1) моделей M_1 (1) і M_2 (2) на прикладі розрахунку зміщень за ВРМ при $\lambda = a / 80$ в однорідній товстій плиті ($\nu = 0,25$; $a / h = 4$; $a / H = 2$). Діє рівномірно розподілене навантаження p на обмеженій області $-5\lambda \leq x_1 \leq 5\lambda$ у вузлах $i = 0, 5$. Схему подано на половині плити $0 \leq x_1 \leq a / 2$ (рис. 3).

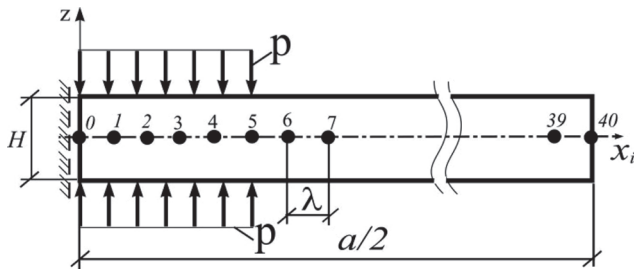


Рис. 3. Розрахункова схема плити при локалізованому навантаженні

Таблиця 1

Значення зміщень $u_\alpha^\# = u_\alpha E / p_0 h$ в плиті при локальному навантаженні

Зміщення	$-10u_3^\#$ при $z = h$			$10u_1^\#$ при $z = h$			$10u_1^\#$ при $z = 0$			
Розв'язок	BPM		MCE (SCAD)	BPM		MCE (SCAD)	BPM		MCE (SCAD)	
Моделі	M_1	M_2		M_1	M_2		M_1	M_2		
Значення в вузлах сітки	0	6,55	6,39	6,42	0	0	0	0	0	0
	1	6,50	6,32	6,37	-0,13	-0,20	-0,19	0,11	0,12	0,13
	4	5,75	5,21	5,52	-0,36	-0,77	-0,76	0,44	0,49	0,50
	5	5,40	4,59	4,90	-1,46	-0,88	-0,93	0,79	0,60	0,61
	6	3,35	3,90	3,62	-1,49	-0,91	-0,97	0,90	0,70	0,71
	7	2,95	3,24	2,96	-0,46	-0,86	-0,88	0,75	0,80	0,81

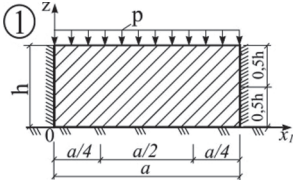
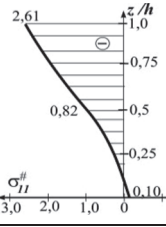
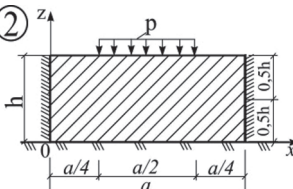
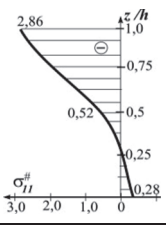
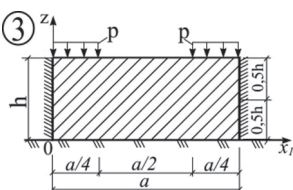
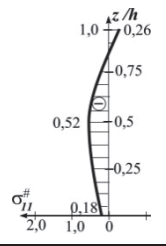
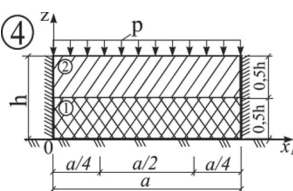
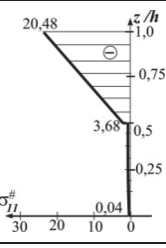
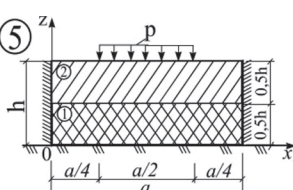
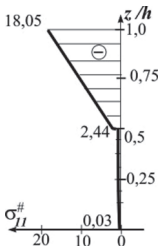
Видно, що в області зміни навантаження p (вузли 5–7 у BPM) результати за моделлю M_2 (2) значно краще, ніж за M_1 (1), узгоджуються з розв'язком за методом скінченних елементів (МСЕ) комплексом SCAD. Зміщення, що отримані за M_1 у вузлах 4, 5, 6, містять «стрибки» значень функцій зміщень, чого немає у результатах за M_2 та за SCAD. В інших вузлах значення зміщень у розв'язках за M_1 , M_2 і SCAD — близькі. Отже, застосування моделі M_2 , що не містить у гіпотезах для $u_\alpha^{(k)}$ функції заданого навантаження p є доцільнішим, ніж моделі M_1 (1). Відзначимо, що в цій задачі кількість невідомих у системі рівнянь МСЕ за SCAD дорівнює $n = 40 \times 18 \times 2 = 1440$, а за BPM $n = 40 \times 6 = 240$. Причому при розрахунку плоскої задачі багат шарової плити за МСЕ із прямокутними СЕ кількість невідомих за наявності особливо тонких шарів може суттєво збільшуватися, тоді як за моделями (1) і (2) кількість рівнянь в системі (6)–(8) і кількість невідомих не залежать від кількості шарів.

Досліджувався вплив на НДС плит характеру навантаження на плити на жорсткій основі при жорсткому защемленні країв (табл. 2).

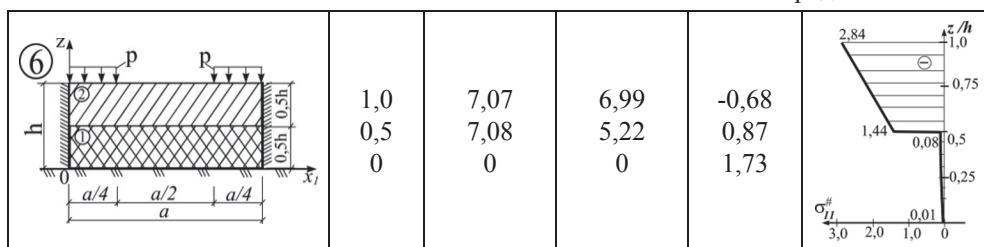
Розглянуто три випадки прикладання рівномірно розподіленого навантаження: 1 — по всій дожині плити; 2 — на половині довжини посередині плити; 3 — на половині довжини біля країв плити. Контакт плит з жорсткою основою — ковзкий, а на краях плита є жорстко защемленою. У варіантах 1, 2 та 3 (табл. 2) розглянуто одношарову трансверсально-ізотропну плиту з $E = 2 \cdot 10^5$ МПа; $E' = 2 \cdot 10^4$ МПа ($E / E' = 10$); $\nu = 0,25$; $\nu' = 0,01$. Для схем 4, 5 та 6 — двохшарову плиту з трансверсально-ізотропними шарами ($E^{(k)} / E'^{(k)} = 10$) однакової товщини $h_1 = h_2 = 0,5h$ з характеристиками: $E^{(1)} = 1 \cdot 10^4$ МПа; $E^{(2)} = 2 \cdot 10^5$ МПа; $\nu^{(1)} = \nu^{(2)} = 0,25$; $\nu'^{(1)} = \nu'^{(2)} = 0,01$. У розрахунку застосовано розрахункові схеми плит, що симетрично добудовані відносно поверхні контакту з основою ($a / h = 4$ $a / H = 2$).

Таблиця 2

Зміщення і напруги в плитах ($a/h = 4$) з жорстко защемленими краями

Варіанти схем плит та навантаження	z/h	$u_3^{\#}$		$u_1^{\#}$	Епюри $\sigma_{11}^{\#}$
		$x = a/2$	$x = a/4$	$x = a/4$	$x = a/2$
1	2	3	4	5	6
	1,0 0,5 0	9,52 5,02 0	7,08 2,68 0	-1,31 0,32 0,85	
	1,0 0,5 0	8,33 3,60 0	4,48 1,98 0	-1,67 0,40 0,72	
	1,0 0,5 0	0,86 0,78 0	2,99 0,76 0	0,23 -0,12 0,14	
	1,0 0,5 0	39,05 35,60 0	23,82 20,24 0	-6,23 5,64 7,41	
	1,0 0,5 0	32,85 29,40 0	17,64 15,59 0	-5,71 4,90 5,86	

Продовження табл. 2



Показано (табл. 2), що в однорідній плиті при дискретному навантаженні (варіанти 2 і 3) відносні поперечні зміщення $u_3^{\#} = u_3 E / ph$ зменшуються порівняно з варіантом 1. У двохшаровій плиті, за наявності слабшого нижнього шару (варіанти 4; 5 і 6), відносні зміщення $u_{\alpha}^{\#} = u_{\alpha} E^{(2)} / ph$ збільшуються вп'ятеро та майже вдсятеро збільшуються відносні напруги $\sigma_{11}^{\#} = \sigma_{11} / p$ порівняно з НДС однорідної плити.

Висновки. Отже, продемонстровано доцільність використання уточнених моделей при оцінці НДС багатшарових покриттів на жорсткій основі під дією локального навантаження. Показано, що застосування моделі M_2 , яка не містить у гіпотезах для зміщень функції заданого навантаження є доцільнішим, ніж моделі M_1 — із заданою функцією навантаження. Виявлено особливості НДС плит та характер розподілу зміщень та напруг в плитах при різних видах розподілених навантажень.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Пискунов В. Г. Об одном варианте неклассической теории многослойных пологих оболочек и пластин. Прикладная механика. 1979. Т. 15. № 11. С. 76–81.
2. Рассказов А. О. К теории многослойных ортотропных пологих. Прикладная механика. 1976. Т. 12. № 11. С. 50–56.
3. Гуртовий А. Г. Высокоточное моделирование деформирования слоистых структур. Механика композитных материалов. 1999. Т. 35. № 1. С. 13–28.
4. Гуртовий А. Г., Тынчук С. А. Безыгбная уточненная модель деформирования многослойных плит на недеформируемом основании. Механика композитных материалов. 2006. Т. 42. № 5. С. 643–654.
5. Гуртовий О. Г., Тынчук С. О., Угрин Л. С. Використання уточнених моделей у задачах розрахунку НДС плит на жорсткій основі та область уточнень. Наукові записки [Українська академія друкарства]. 2017. № 1 (54). С. 52–59.
6. Гуртовий А. Г., Тынчук С. А., Жук Д. В. Деформирование однородных и многослойных покрытий с продольными дефектами на жестком. Механика композитных материалов. 2016. Т. 52. № 2. С. 275–290.

REFERENCES

1. Piskunov, V. G. (1979). Ob odnom variante neklassicheskoi teorii mnogoslonykh pologikh obolochek i plastin: Prikladnaia mekhanika, 15, 11, 76–81 (in Russian).

2. Rasskazov, A. O. (1976). K teorii mnogoslownykh ortotropnykh pologikh: Prikladnaia mekhanika, 12, 11, 50–56 (in Russian).
 3. Gurtovyi, A. G. (1999). Vysokotochnoe modelirovanie deformirovaniia sloistykh struktur: Mekhanika kompozitnykh materialov, 35, 1, 13–28 (in Russian).
 4. Gurtovyi, A. G., & Tynchuk, S. A. (2006). Bezyzhibnaia utochnennaia model deformirovaniia mnogoslownykh plit na nedeformiruemom osnovanii: Mekhanika kompozitnykh materialov, 42, 5, 643–654 (in Russian).
 5. Hurtovyi, O. H., Tynchuk, S. O., & Uhryn, L. S. (2017). Vykorystannia utochnenykh modelei u zadachakh rozrakhunku NDS plyt na zhorstkii osnovi ta oblast utochnen: Naukovi zapysky [Ukrainska akademiia drukarstva], 1 (54), 52–59 (in Ukrainian).
 6. Gurtovyi, A. G., Tynchuk, S. A., & Zhuk, D. V. (2016). Deformirovanie odnorodnykh i mnogoslownykh pokrytii s prodolnymi defektami na zhestkom: Mekhanika kompozitnykh materialov, 52, 2, 275–290 (in Russian).
- doi: 10.32403/1998-6912-2018-1-56-43-52

DEFORMATION OF MULTILAYERED PLATES ON A RIGID FOUNDATION UNDER LOCAL LOADING

O.H. Hurtovyi¹, S.O. Tynchuk¹, L.S. Uhryn²

¹National University of Water and Environmental Engineering,
11, Soborna St., Rivne, 33028, Ukraine
o_g_gurtovyi@ukr.net, s.o.tynchuk@nuwm.edu.ua

²Ukrainian Academy of Printing,
19, Pid Holoskom St., Lviv, 79020, Ukraine
lubouh@gmail.com

Refined models of symmetrical stress-strain state have been used for studying the stress-strain state (SSS) of multilayered plates on a rigid foundation. The design diagram of a transversely loaded plate is formed by symmetric supplementing it with regard to the contact surface and the foundation. The load on the double-thickness plate is applied bilaterally and symmetrically to its mid-surface. In such a way, only unflexural deformation can be modeled, which reduces the number of unknowns and the general order of differentiation of the calculating system of equations. Such a diagram models the frictionless slip of the plate over the surface of its contact with the foundation. The rigid contact of the plate with the foundation is modelled by introducing an additional thin practically undeformed layer.

The refined continual models have been used to take into account the deformations of transverse shear and transverse compression in high iterative approximation. Two variants of refined models have been considered. In the first variant, the load function is given explicitly, whereas in the second variant it is replaced by an unknown desired function of compression. Numerically, the models are realized by the variational-difference method (VDM). To derive the calculating system of algebraic equations of VDM,

the Lagrange variation functional is integrated on a half step of discretization, with a simultaneous use of backward and forward differences for the first derivatives of the displacement functions. The advantages of the second variant of the refined model has been demonstrated in the problems where the load function has gaps. The features of SSS plates on a rigid foundation under the action of local distributed loads have been presented.

Keywords: *multilayered plate, a refined model, transverse shear, transverse compression, variational-difference method.*

Стаття надійшла до редакції 15.02.2018.

Received 15.02.2018.