

УДК: 655.15:519.857

## ВИРІШЕННЯ ЗАВДАННЯ РОЗПОДІЛУ УСТАТКУВАННЯ ІЗ ЗАСТОСУВАННЯМ МЕТОДУ РЕКУРЕНТНИХ СПІВВІДНОШЕНЬ

Х. Б. Кульчицька

Українська академія друкарства,  
вул. Під Голоском, 19, Львів, 79020, Україна

*Застосовано метод рекурентних співвідношень для вирішення завдання розподілу устаткування між додрукарськими дільницями поліграфічного підприємства під час їх технічного переоснащення. Метод рекурентних співвідношень полегшив знаходження шуканих мінімальних витрат через менше число аргументів. Незважаючи на відсутність часових даних, завдання розподілу устаткування розглядали як динамічний процес, який базувався на функціональному рівнянні Беллмана. Застосовано прямий хід обчислень з багатокроковою умовною та безумовною оптимізацією. Кількість кроків дорівнювала кількості підрозділів, яким розподіляли устаткування. Визначено оптимальну кількість одиниць устаткування для кожного підрозділу, що забезпечило мінімальні сумарні витрати на його транспортування та обслуговування під час технічного оновлення дільниць.*

**Ключові слова:** поліграфія, розподіл устаткування, принцип оптимальності Беллмана, рекурентні співвідношення.

**Постановка проблеми.** Зі стрімким розвитком комп'ютерних та інформаційних технологій сучасні видавничо-поліграфічні підприємства потребують постійного оновлення. Формами останнього є технічне переоснащення (нова технологія, матеріали та технічне забезпечення: устаткування, програмне забезпечення без змін будівлі) або реконструкція (передбачає технічне переоснащення зі зміною будівлі: добудовою чи її перебудовою). Технічне переоснащення як один з варіантів оновлення та розширення виробництва застосовують зараз найбільше, адже будувати нові підприємства у наш час дуже ризиковано, особливо для малого та середнього поліграфічного бізнесу. Технічне переоснащення та реконструкція дають змогу збільшити обсяг та прискорити випуск продукції, покращити якість завдяки комп'ютеризації процесів, впровадити матеріало- та енергозберігаючі технології, створити замкнуті виробничі цикли, покращити умови праці тощо. Застаріла технологія та устаткування призводять до підвищення ризику травматизму, аварій та виникнення професійних захворювань, тому технічне оновлення видавничо-поліграфічних підприємств має проводитись регулярно в міру розроблення нових сучасних технологій та комп'ютерної техніки. Одним із складних завдань технічного переоснащення є розподіл устаткування між поліграфічними підрозділами. Кожний підрозділ підприємства зацікавлений в отриманні додаткових одиниць

устаткування та збільшенні обсягу робіт. Проте кількість ресурсів обмежена, що ускладнює завдання та потребує додаткового дослідження.

**Аналіз останніх досліджень та публікацій.** Більшість завдань у проектуванні вирішують за допомогою математичних методів, одним з яких є метод динамічного програмування, який базується на принципі оптимальності Беллмана та використовує рекурентні співвідношення.

Вагомий вклад у вирішення виробничих та проектних завдань із застосуванням математичних методів, а саме динамічного програмування, здійснили І. Акуліч [1], Р. Беллман [2], а також Р. Акоф, А. Коффман, Г. Кун, Дж. Нейман, Р. Черчмен.

Динамічне програмування найбільш широко застосовують для проектування у часі, а саме для розв'язування задач виробничого планування (зміни обсягів поставчань, випуску продукції, заміни устаткування впродовж певного часу) [3]. Проте відомо безліч застосувань, в яких фактор часу не враховується.

У праці [4] В. Біліченко, В. Кружель за допомогою динамічного програмування вирішують завдання маршрутизації автомобільного транспорту, заміни обладнання та рухомого складу, оптимізації управління запчастинами.

Прикладами застосування методу рекурентних співвідношень у розподілі інвестицій та ресурсів є роботи К. Дрозденко, А. Котенко, М. Марко [5], Г. Солодовник [6]. За допомогою динамічного програмування досліджували також операції в економіці та менеджменті — О. Білоцерківський [7], Г. Білогурова, М. Самійленко, О. Боровик, Я. Гончаренко [8], Г. Єфимова, О. Рудик [9], А. Крушевський, Є. Лавров [10], В. Тюптя, В. Шевченко, В. Стрюк та інші.

**Мета статті** — оптимізувати розподіл устаткування під час технічного переоснащення поліграфічних підприємств за умови досягнення мінімальних сумарних витрат на їх транспортування та обслуговування.

**Виклад основного матеріалу дослідження.** Під час технічного переоснащення трьох додрукарських дільниць поліграфічного підприємства необхідно розподілити між ними п'ять одиниць устаткування (комп'ютерів). Технічні характеристики та продуктивність комп'ютерів однакові, тому очікуване збільшення обсягу робіт кожної дільниці пропорційне кількості отриманого устаткування. А от витрати на транспортування та технічне обслуговування (монтування мережі, встановлення програмного забезпечення тощо) будуть різними, оскільки дільниці розташовані у віддалених районах на різній відстані від постачальника комп'ютерів. Припустимо, що відомі витрати  $z_1, z_2, \dots, z_n$  на транспортування та техобслуговування залежно від кількості комп'ютерів ( $x_j$ ), які доставляють  $i$  дільницям. Розподілу підлягає устаткування у кількості  $S$  одиниць. Завдання полягає у визначенні оптимального розподілу комп'ютерів між дільницями, який би забезпечував мінімальні сумарні витрати на транспортування та техобслуговування  $Z_i^*(x)$ . Величини  $x_j$  і  $z_i(x_j)$  наведені у табл. 1.

Якщо дільницям не виділяють устаткування, тоді і витрати дорівнюють нулю.

Кожній дільниці відповідає крок, на якому приймали рішення (turn-based optimization). Задачі кожного кроку розв'язували послідовно та містили менше число змінних. Взаємозалежність кроків визначали їх рекурентність співвідношень.

Таблиця 1

**Витрати на транспортування та технічне обслуговування устаткування**

Кількість одиниць устаткування ( $x_j$ )	Витрати, ум. грошових одиниць		
	$z_1(x_j)$	$z_2(x_j)$	$z_3(x_j)$
0	0	0	0
1	15	16	10
2	30	20	28
3	40	25	35
4	50	55	45
5	60	65	55

Зв'язок між зазначеними кроками забезпечувався загальною кількістю устаткування, яке виділене для технічного оновлення. Завдяки наявності зв'язку між кроками нединамічний процес розглядали як динамічний, тому застосовували метод динамічного програмування, який базується на функціональному рівнянні Беллмана. В основі принципу оптимальності Р. Беллмана лежать дві вимоги: рішення, яке приймається на кожному кроці, має задовольняти умови оптимальності відносно досягнутого в цей момент стану та функція мети має бути адитивною.

Для вирішення завдань динамічного програмування застосовують дві схеми: з прямим та зворотним ходом обчислень. Кожний хід обчислень містить два етапи: попередній етап (умовна оптимізація) та остаточний етап (безумовна оптимізація). За обсягом обчислень ці схеми рівноцінні. Проте додавання нових кроків зручно проводити при використанні прямого ходу обчислень, а дослідження чутливості до варіацій шуканої величини — при зворотному ході обчислень.

Завдання оптимального розподілу устаткування між дільницями вирішували із застосуванням прямого ходу обчислень у два етапи, розбиваючи складне завдання на прості завдання (кроки).

1 етап. Умовну оптимізацію (conditional optimization) проводили в природному порядку — від першого кроку до останнього та визначали умовно-оптимальні рішення для кожного кроку (відповідні мінімальні витрати).

2 етап. Безумовну оптимізацію (unconditional optimization) проводили також по кроках, але навпаки — від останнього кроку до першого. На другому етапі визначали для кожного кроку остаточне безумовне оптимальне управління і мінімальні витрати, тобто оптимальну стратегію з урахуванням заданого початкового стану системи.

Нехай  $z_i(x_j)$  — витрати на транспортування та встановлення  $x_j$  комп'ютерів для дільниці  $D_i$ ;  $x_j$  — кількість комп'ютерів, що планують надати  $i$ -й дільниці  $D_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Математична модель задачі:

$$Z = \sum_{i=1}^n z_i(x_j) \rightarrow \min \text{ за умови } \sum_{i=1}^n (x_j) = s, x_j \in \{0, 1, 2, \dots, S\}, i=1, 2, \dots, n. \quad (1)$$

На першому кроці прямого ходу обчислень визначили мінімальні витрати  $Z_1^*$  при розподілі  $x_j, j = 1, 2, \dots, S$  комп'ютерів для першої дільниці  $D_1$  (2):

$$Z_1(x_j) = Z_1^*(x_j) = z_1(x_j). \quad (2)$$

Для першої дільниці мінімальні витрати можливі при встановленні одного комп'ютера (табл. 1).

На другому кроці визначили витрати під час розподілу комп'ютерів між першою і другою дільницями  $D_1$  і  $D_2$  (3):

$$Z_2(x_j) = \begin{cases} z_2(0) + Z_1^*(x_j - 0), \\ z_2(1) + Z_1^*(x_j - 1), \\ z_2(2) + Z_1^*(x_j - 2), \\ z_2(3) + Z_1^*(x_j - 3), \\ \dots \\ z_2(x_j) + Z_1^*(0) \end{cases} \quad Z_2^*(x_j) = \min_{0 \leq k \leq j} \{z_2(k) + Z_1^*(x_j - k)\} \quad (3)$$

Для  $x_j = j, j = 1, 2, \dots, 5$

Отримані дані  $Z_2(x_j)$  подано у табл. 2.

Таблиця 2

**Витрати на транспортування та технічне обслуговування устаткування  
для перших двох дільниць**

$x_j$	$k$	$z_2(x_j)$	$Z_1^*(x_j)$	$Z_2(x_j)$
0	0	0	0	0*
1	1	16	0	16
	0	0	15	15*
2	2	20	0	20*
	1	16	15	31
	0	0	30	30
3	3	25	0	25*
	2	20	15	35
	1	16	30	46
	0	0	40	40
4	4	55	0	55
	3	25	15	40*
	2	20	30	50
	1	16	40	46
	0	0	50	50
5	5	65	0	65
	4	55	15	70
	3	25	30	55*
	2	20	40	60
	1	16	50	66
	0	0	60	60

Мінімальні витрати для перших двох дільниць різні та залежать від кількості встановленого устаткування:  $Z_2^*(0) = 0, Z_2^*(1) = 15, Z_2^*(2) = 20, Z_2^*(3) = 25, Z_2^*(4) = 40, Z_2^*(5) = 55$  (табл. 2).

На останньому, третьому кроці визначили мінімальні витрати при розподілі  $S$  одиниць комп'ютерів між трьома дільницями (4).

$$Z_n(x_j) = \begin{cases} z_n(0) + Z_{n-1}^*(S), \\ z_n(1) + Z_{n-1}^*(S-1), \\ \dots\dots\dots \\ z_n(S) + Z_{n-1}^*(0) \end{cases} \quad Z_n^*(S) = \min_{0 \leq k \leq S} \{z_n(k) + Z_{n-1}^*(S-k)\}. \quad (4)$$

Достатньо обчислити  $Z_n^*(S)$  та  $Z_n^*(S)$ , тобто  $Z_3^*(5)$  та  $Z_3^*(5)$ :

$$Z_3(5) = \begin{cases} z_3(0) + Z_2^*(5), \\ z_3(1) + Z_2^*(4), \\ z_3(2) + Z_2^*(3), \\ \dots\dots\dots \\ z_3(5) + Z_2^*(0) \end{cases} \quad Z_3^*(5) = \min_{0 \leq k \leq 5} \{z_3(k) + Z_2^*(5-k)\}. \quad (5)$$

Отримані дані  $Z_3(5)$  та  $Z_3^*(5)$  подано у табл. 3.

Таблиця 3

**Витрати на транспортування та технічне обслуговування устаткування для трьох дільниць**

$x_j$	$k$	$z_3(x_j)$	$Z_2^*(x_j)$	$Z_3(x_j)$
5	5	55	0	55
	4	45	15	60
	3	35	20	55
	2	28	25	53
	1	10	40	50*
	0	0	55	55

Другий етап дослідження мистив визначення оптимального розподілу  $S$  комп'ютерів серед  $n$  дільниць. Схема обчислень для другого безумовного етапу з визначення мінімальних витрат:  $z_3^* \rightarrow k_3^* \rightarrow z_2^* \rightarrow k_2^* \rightarrow z_1^* \rightarrow k_1^* \rightarrow z_0^*$ .

Нехай  $Z_n^*(S)$  досягає мінімуму для  $k = S$ , тоді  $S_1$  комп'ютерів треба виділити дільниці  $D_n$ . Далі потрібно розподілити  $S-S_1$  одиниць устаткування серед  $n-1$  дільниць.

Припустимо, що  $Z_{n-1}^*(S-S_1)$  досягає мінімуму при  $k = S_2$ , тобто  $S_2$  комп'ютерів потрібно виділити дільниці  $D_{n-2}$ .

Нарешті,  $S_n = S - (S_1 + S_2 + \dots + S_{n-1})$  комп'ютерів треба виділити третій дільниці. Мінімальні витрати на транспортування та технічне обслуговування комп'ютерів становитимуть  $Z_n^*(S)$ .

Оскільки мінімальні витрати при розподілі п'яти комп'ютерів усім трьом дільницям  $Z_3^*(5) = 50$  умовних одиниць досягаються при  $k = 1$ , тоді третій дільниці треба виділити один комп'ютер.

Далі потрібно розподілити чотири одиниці устаткування, що залишились, між першими двома дільницями. З табл. 1 маємо, що  $Z_2^*(4) = 40$  і досягається для  $k = 3$ . Це означає, що для другої дільниці потрібно виділити три одиниці устаткування, а першій дільниці залишиться  $5-1-3 = 1$  одиниця устаткування.

Мінімальні витрати на транспортування та встановлення усіх комп'ютерів на трьох дільницях дорівнюють 50 умовних одиниць (табл. 3), що можна перевірити за даними табл. 1  $z_0^* = z_1(1) + z_2(3) + z_3(1) = 15 + 25 + 10 = 50$ .

**Висновки.** Застосовано метод рекурентних співвідношень для вирішення завдання розподілу устаткування між додрукарськими дільницями поліграфічного підприємства. Отримано оптимальну кількість комп'ютерів для кожного підрозділу, що забезпечило мінімальні сумарні витрати на транспортування та обслуговування комп'ютерів під час технічного переоснащення дільниць.

### СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Акулич И. Л. Математическое программирование в примерах и задачах : учеб. пособ. ; 3-е изд. Санкт-Петербург : Лань, 2011. 352 с.
2. Беллман Р. Прикладные задачи динамического программирования. Москва : Иностранная литература, 1965. 459 с.
3. Шумейко О. А. Динамічна модель оптимального розподілу інвестицій при заміні обладнання. Економіко-математичне моделювання соціально-економічних систем : зб. наук. праць МННЦ ІТiС. Київ : 2012. Вип. 17. С. 255–267.
4. Біліченко В. В., Кужель В. П. Моделювання технологічних процесів підприємств автомобільного транспорту. Вінниця : ВНТУ, 2017. 164 с.
5. Марко М. Я., Цегелик Г. Г. Задача розподілу ресурсів між підприємствами фірми, що забезпечує максимальне збільшення випуску продукції. Вісник Львівської комерційної академії. Серія економічна. 2016. Вип. 50. С. 153–156.
6. Солодовник Г. В. Детермінована модель оптимального розподілу ресурсів. Молодий вчений. 2016. № 6. С. 108–111.
7. Білоцерківський О. Б. Математичне моделювання в економіці та менеджменті. Харків : НТУ ХП, 2018. 90 с.
8. Гончаренко Я. В. Математичне програмування. Київ : НПУ імені М. П. Драгоманова, 2010. 184 с.
9. Сфимова Г. О., Рудик О. Г. Лінійні багатокритеріальні задачі виробничого планування. Вісник соціально-економічних досліджень. 2008. Вип. 31. С. 102.
10. Лавров С. А., Перхун Л. П., Шендрік В. В. та ін. Математичні методи дослідження операцій : підруч. Сумський державний університет, 2017. 212 с.

### REFERENCES

1. Akulich, I. L. (2011). Matematicheskoe programmirovaniye v primerah i zadachah. 3-e izd. Sankt-Peterburg : Lan' (in Russian).

2. Bellman, R. (1965). Prikladnye zadachi dinamicheskogo programmirovaniya. Moskva : Inostrannaya literatura (in Russian).
3. Shumeiko, O. A. (2012). Dynamichna model optimalnogo rozpodilu investytzii pry zaminy obladnannia: Ekonomiko-matematychne modeliuвання sotsialno-ekonomichnykh system : zb. nauk. prats MNNTs ITiS. Kyiv, 17, 255–267 (in Ukrainian).
4. Bilichenko, V. V., & Kuzhel, V. P. (2017). Modeliuвання tekhnolohichnykh protsesiv pidpriemstv avtomobilnogo transportu. Vinnytsia : VNTU (in Ukrainian).
5. Marko, M. Ya., & Tsehelyk, H. H. (2016). Zadacha rozpodilu resursiv mizh pidpriemstvamy firmy, shcho zabezpechuie maksimalne zbilshennia vypusku produktsii: Visnyk Lvivskoi komertsiiinoi akademii. Serii ekonomichna, 50, 153–156 (in Ukrainian).
6. Solodovnyk, H. V. (2016). Determinovana model optimalnogo rozpodilu resursiv: Molody vchenyi, 6, 108–111 (in Ukrainian).
7. Bilotserkivskiy, O. B. (2018). Matematychne modeliuвання v ekonomitsi ta menedzhmenti. Kharkiv : NTU KhPI (in Ukrainian).
8. Honcharenko, Ya. V. (2010). Matematychne prohramuvannia. Kyiv : NPU imeni M. P. Drahomanova (in Ukrainian).
9. Yefymova, H. O., & Rudyk, O. H. (2008). Liniini bahatokryterialni zadachi vyrobnychoho planuvannia: Visnyk sotsialno-ekonomichnykh doslidzhen, 31, 102 (in Ukrainian).
10. Lavrov, Ye. A., Perkhun, L. P., & Shendryk, V. V. ta in. (2017). Matematychni metody doslidzhennia operatsii. Sums'kyi derzhavnyi universytet (in Ukrainian).

doi: 10.32403/1998-6912-2021-1-62-87-94

## SOLVING THE PROBLEM OF EQUIPMENT DISTRIBUTION USING THE METHOD OF RECURRENT RELATIONS

Kh. B. Kulchytska

*Ukrainian Academy of Printing,  
19, Pid Holoskom St., Lviv, 79020, Ukraine  
kulchytska422@gmail.com*

*In the rapid development of information technology, modern publishing and printing companies must constantly be advancing. Some forms of such advances include technical re-equipment or reconstruction, which increases the volume and accelerates the production, improves the quality and working conditions. One of the most challenging tasks of technological advancement is the distribution of equipment between printing divisions. Each division of the enterprise is interested in obtaining new equipment units and increasing the volume of work. However, it is necessary to take into account the underlying costs because the technical characteristics of the equipment are the same, and so is the performance.*

*This paper investigates the dependence of transportation and maintenance costs on the amount of equipment provided to different divisions of the printing enterprise.*

*The method of recurrent relations was used to solve the problem of distribution of equipment between prepress sections of the printing company. The recurrent method made finding the required minimum costs easier by using a smaller number of variables. This task was considered to be a dynamic process despite the lack of temporal data. Therefore, dynamic programming based on the Bellman functional equation was used to solve it. The problem of optimal distribution of equipment between sections was solved using a forward dynamic programming algorithm, dividing a complex task into simple tasks (steps). The number of steps was equal to the number of divisions to which the equipment was distributed, so conditional and unconditional optimizations were multi-step.*

*As a result, the optimal number of equipment units for each division was determined, ensuring the minimum total costs for its transportation and maintenance during the technical re-equipment of divisions.*

**Keywords:** *printing, equipment distribution, Bellman principle of optimality, recurrent relations.*

*Стаття надійшла до редакції 27.04.2021.*

*Received 27.04.2021.*