

В. И. ЯКОВЛЕВА

ПРИМЕНЕНИЕ КОНФОРМНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ К РЕШЕНИЮ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ КРУЧЕНИЯ

В настоящей работе с помощью метода конформного отображения [1, 3] рассмотрены случаи кручения сплошных и полых упругих призматических стержней. Для этих стержней определены касательные напряжения по контурам сечений.

Пусть оси координат xy будут главными осями инерции сечений, которые ограничены контурами, извне — L_1 и изнутри — L_2 .

Пользуясь отображающей функцией вида

$$\omega(\zeta) = R \sum_{\nu=0}^n g_{p,\nu+1} \cdot \zeta^{p\nu+1}, \quad (1)$$

где p — число осей симметрии сечений, будем считать, что кривые L_1 и L_2 соответствуют окружностям γ_1 радиуса $R_1 = 1$ и γ_2 радиуса $R_2 < 1$.

Задачу об определении напряжений в упомянутых стержнях можно свести к определению аналитической функции $\psi(xy)$, удовлетворяющей граничным условиям:

$$\left. \begin{aligned} \psi(xy) &= \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + C_1 \text{ на } L_1 \\ \psi(xy) &= \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + C_2 \text{ на } L_2 \end{aligned} \right\}, \quad (2)$$

где C_1 и C_2 — две действительные постоянные [3], из которых одна может быть фиксирована произвольно.

Как известно, комплексная функция кручения имеет вид

$$F_k = \varphi + i\psi, \quad (3)$$

или

$$\frac{1}{i} F_k = \psi - i\varphi. \quad (4)$$

Функция ψ , как видно из (4), является действительной частью выражения $\frac{1}{i} F_k$ и поэтому контурные условия в комплексных переменных примут вид

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{Re} \frac{1}{i} F_k(z) &= \frac{\bar{z}z}{2} + C_1 \text{ на } L_1 \\ \operatorname{Re} \frac{1}{i} F_k(z) &= \frac{\bar{z}z}{2} + C_2 \text{ на } L_2 \end{aligned} \right\}, \quad (5)$$

где $z = x + iy$.

Перейдя к преобразованной области, уравнение (5) представим в виде

$$\left. \begin{aligned} Re \frac{1}{i} F_{\kappa} [\omega(\zeta)] &= \frac{1}{2} \omega(\zeta) \overline{\omega(\zeta)} + C_1 \text{ на } \gamma_1 \\ Re \frac{1}{i} F_{\kappa} [\omega(\zeta)] &= \frac{1}{2} \omega(\zeta) \overline{\omega(\zeta)} + C_2 \text{ на } \gamma_2 \end{aligned} \right\}, \quad (6)$$

или

$$\left. \begin{aligned} Re \frac{1}{i} f(\zeta) &= \frac{1}{2} \omega(R_1 e^{i\theta}) \overline{\omega(R_1 e^{-i\theta})} + C_1 \text{ на } \gamma_1 \\ Re \frac{1}{i} f(\zeta) &= \frac{1}{2} \omega(R_2 e^{i\theta}) \overline{\omega(R_2 e^{-i\theta})} + C_2 \text{ на } \gamma_2 \end{aligned} \right\}, \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} f(\zeta) &= F_{\kappa} [\omega(\zeta)]; \\ \zeta &= \rho \cdot e^{i\theta}. \end{aligned}$$

Представим функцию $\frac{1}{i} f(\zeta)$ в виде [1, 3] ряда Лорана; при этом получим

$$\frac{1}{i} f(\zeta) = \sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} a_{\rho\kappa} \zeta^{\rho\kappa}, \quad (8)$$

или в тригонометрическом виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{i} f(\zeta) &= a_0 + ib_0 + \sum_1^{\infty} [(a_{\kappa} + ib_{\kappa}) \rho^{\kappa} \times (\cos k\theta + i \sin k\theta) + \\ &+ (a_{-\kappa} + ib_{-\kappa}) \rho^{-\kappa} \times (\cos k\theta - i \sin k\theta)]. \end{aligned} \quad (9)$$

Выделив действительную часть выражения (9) и определив на основании (1) правую сторону соотношений (7), приведем граничные условия к виду

$$\begin{aligned} a_0 + \sum_{\kappa=1}^{\infty} [(R_s^{\kappa} a_{\kappa} + R_s^{-\kappa} \bar{a}_{-\kappa}) \cos k\theta - (R_s^{\kappa} b_{\kappa} - R_s^{-\kappa} b_{-\kappa}) \sin k\theta] = \\ = R^2 \left[\frac{1}{2} \sum_{\nu=0}^n g_{\rho\nu+1} R_s^{2\rho\nu+2} + \right. \\ \left. + \sum_{\nu=0}^{n-t} \Gamma_{\nu} R^{2\rho\nu+2} \cos pt\theta \right] + C_s \left\{ \begin{array}{l} \text{на } \gamma_1 \text{ для } s=1 \\ \text{на } \gamma_2 \text{ для } s=2, \end{array} \right. \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} \Gamma_{\nu} &= g_{\rho\nu+1} \cdot g_{\rho\nu+pt+1}; \\ t &= 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Пусть $C_1 = -\frac{1}{2}R^2 \sum_{\nu=0}^n g^2 p^{\nu+1} \cdot R_1^{2p\nu+2}$, тогда из (10) для $s=1$ получим $a_0 = 0$.

Сравнив коэффициенты при \cos и \sin в уравнениях (10) найдем

$$b_{\kappa} = b_{-\kappa} = 0$$

$$(R_s^{\kappa} a_{\kappa} + R_s^{-\kappa} a_{-\kappa}) \cos k\theta = \sum_{\nu=0}^{n-t} \Gamma_{t\nu} R_s^{2p\nu+pt+2} \cos pt\theta. \quad (11)$$

Полученные равенства будут удовлетворяться для $k=pt$, решая их, получим

$$\left. \begin{aligned} a_{pt} &= R^2 \sum_{\nu=0}^{n-t} \Gamma_{t\nu} \frac{1 - R_2^{2p\nu+2pt+2}}{1 - R_2^{2pt}} \\ a_{-pt} &= R^2 \sum_{\nu=0}^{n-t} \Gamma_{t\nu} \frac{1 - R_2^{2p\nu+2}}{1 - R_2^{-2pt}} \end{aligned} \right\}, \quad (12)$$

$t=1, 2 \dots n$. После чего функция кручения определится из соотношения (8)

$$f(\zeta) = i \sum_1^n (a_{pt} \zeta^{pt} + a_{-pt} \zeta^{-pt}). \quad (13)$$

Зная функцию кручения, определим напряжения [3] в криволинейной ортогональной системе координат по формуле

$$\tau_{\rho} - i\tau_{\theta} = \frac{G\vartheta\zeta}{\rho[\omega'(\zeta)]} [f'(\zeta) - i\overline{\omega(\zeta)} \omega'(\zeta)], \quad (14)$$

где G — модуль сдвига;

ϑ — угол закручивания, который определится из соотношения

$$M_{\kappa} = \vartheta D \quad (15)$$

и

$$D = G(I + D_0), \quad (16)$$

где

M_{κ} — крутящий момент;

I — полярный момент инерций;

D — жесткость.

Полярный момент инерции [3] для полого сечения записывается в виде

$$I = \sum_{s=1}^2 (-1)^{1+s} \frac{1}{4i} \int_{\Gamma_s} \overline{\omega^2(\sigma_s)} \omega(\sigma_s) d\omega(\sigma_s), \quad (17)$$

$$\text{где } \sigma_1 = R_1 e^{i\theta}; \\ \sigma_2 = R_2 e^{i\theta},$$

а также [3]

$$D_0 = \sum_{s=1}^2 (-1)^s \frac{1}{4} \int_{\gamma_s} [f(\sigma_s) + \overline{f(\sigma_s)}] d[\omega(\sigma_s) \overline{\omega(\sigma_s)}] \quad (18)$$

Подставив в (17) и (18) развернутые значения $f(\sigma_s)$ и $\omega(\sigma_s)$ в тригонометрическом виде [см. (13) и (1)] и используя свойства ортогональности тригонометрических функций, получим соотношение для определения момента инерции

$$I = \frac{\pi}{2} R^4 \sum_{s=1}^2 (-1)^{1+s} \left[\sum_{\nu=0}^{n-t} \Gamma_{t\nu} R_s^{2p\nu+2pt+2} \cdot \sum_{\nu=0}^{n-t} (2p\nu+2pt+2) \Gamma_{t\nu} R_s^{2p\nu+pt+2} + \right. \\ \left. + \sum_{\nu=0}^n g_{p\nu+1}^2 R_s^{2p\nu+2} \sum_{\nu=0}^n (p\nu+1) g_{p\nu+1}^2 R_s^{2p\nu+2} \right] \quad (19)$$

и

$$D_0 = \frac{\pi}{4} R^4 \sum_{t=1}^n [C_{pt}^{(\rho=R_1)} b_{pt}^{(\rho=R_2)} - C_{pt}^{(\rho=1)} b_{pt}^{(\rho=1)}], \quad (20)$$

где

$$C_{pt}^{(\rho)} = (\alpha_{-pt} \rho^{-pt} - \alpha_{pt} \rho^{pt}) \frac{2}{R^2} i; \\ b_{pt}^{(\rho)} = -2 \sum_{\nu=0}^{n-t} t \Gamma_{t\nu} \rho^{2p\nu+pt+2}.$$

После преобразований формула (14) примет следующий вид:

$$\tau_\rho + i\tau_\theta = \frac{G\delta R^2}{[\omega'(\zeta)]} \left\{ \sum_{\nu=0}^{n-t} \Gamma_{t\nu} pt [\rho^{2p\nu+pt+1} - \frac{1 - R_2^{2p\nu+2pt+2}}{1 - R_2^{2pt}} \rho^{pt-1} - \right. \\ \left. - \frac{1 - R_2^{2p\nu+2}}{1 - R_2^{-2pt}} \rho^{-2pt-1}] \sin pt\theta + \right. \\ \left. + i \sum_{\nu=0}^{n-t} \Gamma_{t\nu} \left[-pt \frac{1 - R_2^{2p\nu+2pt+2}}{1 - R_2^{2pt}} \rho^{pt-1} + pt \frac{1 - R_2^{2p\nu+2}}{1 - R_2^{-2pt}} \rho^{-pt-1} + \right. \right. \\ \left. \left. + (2p\nu+pt+2) \rho^{2p\nu+pt+1} \right] \cos pt\theta + i \sum_{\nu=0}^n (p\nu+1) \rho^{2p\nu+1} g_{p\nu+1}^2 \right\}. \quad (21)$$

Подставив $\rho = R_1 = 1$ в (21), получим соотношения для определения напряжений по внешнему контуру сечения

$$\tau_\theta^{(\rho=R_1=1)} = \frac{G\delta R^2}{[\omega'(\sigma_1)]} \left[\sum_{\nu=0}^{n-t} B_{t\nu}^{(\rho=R_1=1)} \Gamma_{t\nu} \cos pt\theta + \sum_{\nu=0}^n C_{B\nu}^{(\rho=R_1=1)} g_{p\nu+1}^2 \right], \quad (22)$$

где

$$B_{t\nu}^{(\rho=R_1=1)} = \frac{1}{1-R_2^{2pt}} [2ptR_2^{2p\nu+2pt+2} - (2p\nu + 2pt + 2)R_2^{2pt} + (2p\nu + 2)];$$

$$C_{B\nu}^{(\rho=R_1=1)} = (p\nu + 1).$$

Напряжения по внутренним контурам определим, подставив в (21) $\rho = R_2$:

$$\tau_{\Theta}^{(\rho=R_2)} = \frac{G\theta R^2}{|\omega'(\sigma_2)|} \left[\sum_{\nu=0}^{n-t} B_{t\nu}^{(\rho=R_2)} \Gamma_{t\nu} \cos pt\Theta + \sum_{\nu=0}^n C_{B\nu}^{(\rho=R_2)} g_{p\nu+1}^2 \right], \quad (23)$$

где

$$B_{t\nu}^{(\rho=R_2)} = \frac{1}{1-R_2^{2pt}} [(2p\nu + 2pt + 2)R_2^{2p\nu+pt+1} - (2p\nu + 2) \times$$

$$\times R_2^{2p\nu+3pt+1} - 2ptR_2^{pt-1}];$$

$$C_{B\nu}^{(\rho=R_2)} = (p\nu + 1)R_2^{2p\nu+1}.$$

На основании (I) определим выражение

$$|\omega'(\xi)|^2 = R^2 \left[\sum_{\nu=0}^{n-t} A_{t\nu} \cdot \Gamma_{t\nu} \cdot \cos pt\Theta + \sum_{\nu=0}^n C_{A\nu} g_{p\nu+1}^2 \right], \quad (24)$$

где

$$A_{t\nu} = (2p\nu + 2)(p\nu + pt + 1)\rho^{2p\nu+pt};$$

$$C_{A\nu} = (p\nu + 1)^2 \rho^{2p\nu}.$$

Очевидно, что коэффициенты C_{pt} , b_{pt} , $B_{t\nu}$, $C_{B\nu}$ и $A_{t\nu}$ не зависят от коэффициентов отображающей функции, а только от модуля ρ переменной ξ . Они подсчитаны для разных значений ρ и сведены в таблицы, которые в настоящей статье не приводятся. Эти выражения нами подсчитаны для $\rho = 1$ и $\rho = 0,9; 0,7; 0,5; 0,4; 0,3; 0$. При определении жесткостей и напряжений для случаев $\rho \neq 1$, благодаря соответствующему представлению отображающих функций (введение нулевых коэффициентов отображающих функций), эти таблицы использованы нами для всех принятых ниже значений ρ , что в значительной мере упростило подсчеты.

Ниже рассмотрим сечения частного вида.

СЛУЧАЙ СЕЧЕНИЯ С ОДНОЙ ОСЬЮ СИММЕТРИИ

(сечение сводчатой формы)

Исследуем случай кручения тел полого и сплошного сечений для $R_1 = 1$ и $R_2 = 0,5; 0,9, 0$ (рис. 1, 2, 3).

Эти сечения получены при отображении кольца радиусов R_1 и R_2 посредством отображающей функции вида [2].

$$\omega(\zeta) = R \sum_{\nu+0}^{12} g_{\nu+1} \cdot \zeta^{\nu+1}; \quad (25)$$

коэффициенты $g_{\nu+1}$ приводятся ниже

ν	$g_{\nu+1}$	ν	$g_{\nu+1}$	ν	$g_{\nu+1}$	ν	$g_{\nu+1}$
0	1,0	4	-0,0506	7	-0,0103	11	0,0051
1	0	5	0,0303	8	0,0169	12	-0,0064
2	0	6	0	9	-0,0096		
3	0,0412			10	0		

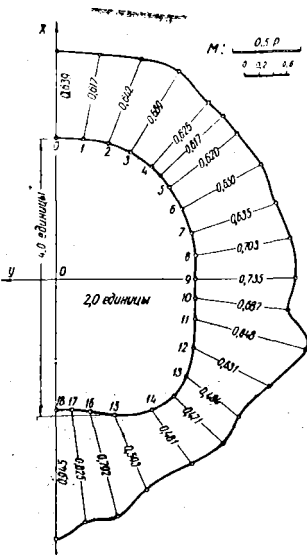


Рис. 1. Напряжения $\frac{\sigma_{\theta}}{\rho}$ по контуру сводчатого сплошного сечения $p R_1 = 1,0$; $R_2 = 0$; $p = \frac{M}{R^3}$; $R = 2,09$ единиц.

Отображающая функция в параметрическом виде, записанная для подсчета координат точек кривых $\rho = \text{const}$, $\theta = \text{const}$, имеет вид:

$$x = R (\cos \theta + 0,041 \cos 4 \theta - 0,051 \cos 5 \theta + 0,030 \cos 6 \theta - 0,010 \cos 8 \theta + 0,017 \cos 9 \theta - 0,010 \cos 10 \theta + 0,005 \cos 12 \theta - 0,006 \cos 13 \theta); \quad (26)$$

$$y = R (\sin \theta + 0,041 \sin 4 \theta - 0,051 \sin 5 \theta + 0,030 \sin 6 \theta - 0,010 \sin 8 \theta + 0,017 \sin 9 \theta - 0,010 \sin 10 \theta + 0,005 \sin 12 \theta - 0,006 \sin 13 \theta).$$

Координаты точек кривых для $R = 2,089$ и $\rho = 1; 0,9; 0,5$, приведены в таблице 1.

Воспользуемся формулой (19) для $p = 1$ и подсчитаем моменты инерции сечений, внешние и внутренние контуры которых соответствуют $R_1 = 1$ и $R_2 = 0; 0,5; 0,9$.

Опуская промежуточные действия, приводим результаты подсчетов в таблице 3.

D_0 — определится из соотношения (20). Значения коэффициентов C_t и b_t ($p = 1$) помещены в таблице 2 (для сечения $R_1 = 1$, $R_2 = 0,9$).

По формуле (20) и данным таблицы 2 подсчитываем значение D_0 :

$$D_0^{(0,9)} = \frac{\pi^2}{4} (0,04945 - 0,13499) = -0,02139 \pi R^4.$$

Опуская промежуточные подсчеты, получим D_0 и для других сечений, значения которых приводятся ниже в таблице 3. Там же подсчитаны жесткости сечений.

Таблица 1

Координаты точек кривых $\rho = \text{const}; \theta = \text{const}$

θ	$\rho = 1$		$\rho = 0,9$		$\rho = 0,5$	
	x	y	x	y	x	y
0°	2,123	0,0	1,904	0,0	1,048	0,0
10°	2,089	0,385	1,870	0,342	1,032	0,183
20°	1,964	0,754	1,763	0,666	0,983	0,373
30°	1,794	1,060	1,622	0,956	0,904	0,525
40°	1,596	1,358	1,446	1,223	0,797	0,674
45°	1,467	1,503	1,318	1,345	0,736	0,740
50°	1,307	1,626	1,189	1,453	0,669	0,800
60°	1,000	1,807	0,908	1,628	0,518	0,903
70°	0,665	1,941	0,595	1,746	0,356	0,979
80°	0,328	1,983	0,311	1,805	0,182	1,925
90°	0,022	2,005	0,022	1,828	0,004	1,042
100°	-0,286	1,999	-0,239	1,821	-0,172	1,029
110°	-0,581	1,995	-0,558	1,784	-0,352	0,987
120°	-0,998	1,966	-0,878	1,730	-0,522	0,913
130°	-0,430	1,866	-1,269	1,577	-0,677	0,806
135°	-1,705	1,710	-1,443	1,425	-0,746	0,742
140°	-1,896	1,390	-1,599	1,235	-0,809	0,672
150°	-1,984	0,838	-1,730	0,830	-0,912	0,515
160°	-1,932	0,492	-1,766	0,504	-0,983	0,358
170°	-1,907	0,229	-1,756	0,238	-1,021	0,175
180°	-1,887	0,0	-1,752	0,0	-1,036	0,0

Обозначим выражения в квадратных скобках соотношений (22) и (23) для $\rho = 1$ через L_s , тогда будем иметь

$$L_s = \sum_{\nu=0}^{n-1} [B_{t_\nu}^{(\rho=R_s)} \Gamma_{t_\nu} \cos t\theta] + \sum_{\nu=0}^n C_{B_\nu}^{(\rho=R_s)} g_{\nu+1}^2. \quad (27)$$

Подставив в (22) и (23) $D = dGR^4$ (табл. 3) и учитывая (27), получим

$$\tau_\theta^{(\rho=R_s)} = \frac{M_k L_s}{R^2 d (\omega'(\sigma_s))}, \quad (28)$$

Таблица 2

Значения коэффициентов C_t, b_t (сечение $R_1 = 1; R_2 = 0,9$).

t	$\rho = R_2 = 0,9$		$\rho = R_1 = 1$		$\rho = R_2 = 0,9$	$\rho = R_1 = 1$
	C_t	b_t	C_t	b_t	$C_t b_t$	$C_t b_t$
1	0,0495	0,0030	0,0503	0,0080	0,00015	0,00040
2	-0,0058	-0,0015	-0,0050	-0,0040	0,00001	0,00002
3	-0,1031	-0,1479	-0,1241	-0,2543	0,01525	0,03156
4	0,1041	0,2183	0,1372	0,4187	0,02273	0,05745
5	-0,0533	-0,1478	-0,0772	-0,3156	0,00788	0,02436
6	0,0005	0,0008	0,0007	0,0030	—	—
7	0,0137	0,0569	0,0241	0,1505	0,00078	0,00363
8	-0,0194	-0,0957	-0,0380	-0,2789	0,00186	0,01060
9	0,0097	0,0550	0,0211	0,1775	0,00053	0,00375
10	0	0	0	0	0	0
11	-0,0040	-0,0285	-0,0106	-0,1122	0,00011	0,00119
12	0,0044	0,0351	0,0132	0,1536	0,00015	0,00203
					Σ 0,04945	0,13499

Таблица 3

Жесткости сечений

Сечение	$\frac{D_0}{\pi R^4}$	$\frac{I}{\pi R^4}$	$\frac{D}{G\pi R^4}$	$d = \frac{D}{G R^4}$
$R_1 = 1; R_2 = 0$	0,0262	0,5184	0,4922	1,5461
$R_1 = 1; R_2 = 0,5$	0,0264	0,4871	0,4607	1,4475
$R_1 = 1; R_2 = 0,9$	0,0214	0,1854	0,1640	0,5154

или

$$\tau_{\theta}^{(\rho=R_s)} = M_k \frac{1}{R^3 d} \frac{L_s}{\frac{1}{R} |\omega'(\sigma_s)|} \quad (29)$$

Пусть

$$\eta_s = \frac{L_s}{\frac{1}{R} |\omega'(\sigma_s)|} \quad (30)$$

тогда будем иметь

$$\tau_{\theta} = \frac{M_k \eta_{is}}{R^3 d}. \quad (31)$$

В случае $R_1 = 1$; $R_2 = 0,9$ для внешнего контура будет

$$L_1 = (-0,0170 \cos \theta + 0,0028 \cos 2\theta + 0,0375 \cos 3\theta - 0,0543 \cos 4\theta + \\ + 0,0373 \cos 5\theta - 0,0008 \cos 6\theta - 0,0161 \cos 7\theta + \\ + 0,0251 \cos 8\theta - 0,0150 \cos 9\theta + 0,0079 \cos 11\theta - 0,0103 \cos 12\theta) + 1,0295. \quad (32)$$

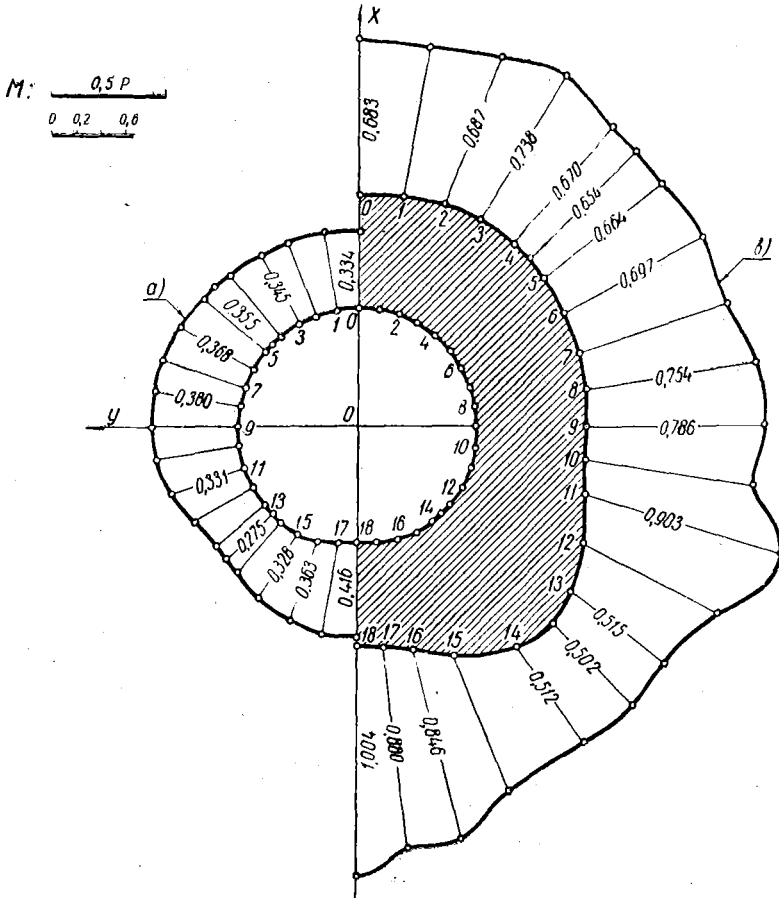


Рис. 2. Кривые $\frac{\tau_{\theta}}{p}$ а — по внутреннему контуру $R_2 = 0,5$; б — по внешнему контуру $R_1 = 1$.

Для внутреннего контура

$$L_2 = (0,0127 \cos \theta - 0,0024 \cos 2\theta - 0,0327 \cos 3\theta + 0,0461 \cos 4\theta - \\ - 0,0312 \cos 5\theta + 0,0006 \cos 6\theta + 0,0122 \cos 7\theta - 0,0193 \cos 8\theta + \\ + 0,0109 \cos 9\theta - 0,0054 \cos 11\theta + 0,0067 \cos 12\theta) + 0,9107. \quad (33)$$

$\frac{1}{R} |\omega'(\sigma_s)|$ для $p = 1$ и $R_1 = 1$; $R_2 = 0,9$ определится из соотношения (24).

Для внешнего контура

$$\frac{1}{R_1^2} |(\omega'(R_1 e^{i\theta}))|^2 = / -0,2376 \cos \theta + 0,0337 \cos 2\theta +$$

$$+ 0,4623 \cos 3\theta - 0,6804 \cos 4\theta + 0,4776 \cos 5\theta - 0,0104 \cos 6\theta -$$

$$- 0,2256 \cos 7\theta + 0,3660 \cos 8\theta - 0,2190 \cos 9\theta + 0,1224 \cos 11\theta -$$

$$- 0,1664 \cos 12\theta / + 1,1749. \quad (34)$$

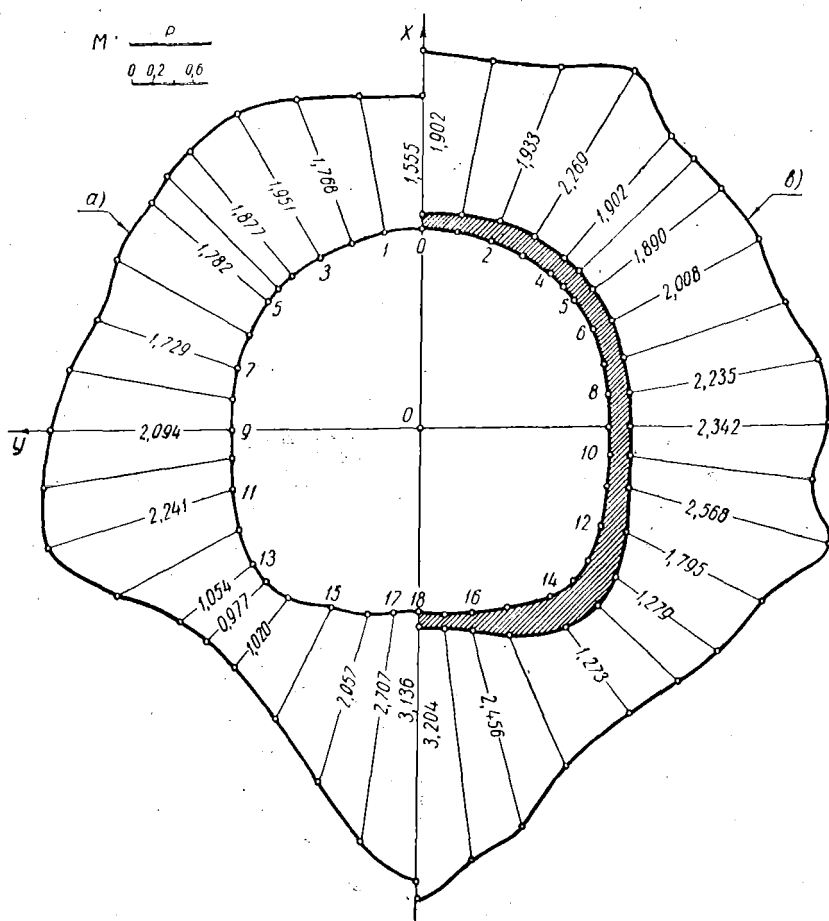


Рис. 3. Кривые $\frac{c_\theta}{p}$ а — по внутреннему контуру $R_2 = 0,9$; в — по внешнему контуру $R_1 = 1$.

Для внутреннего контура

$$\frac{1}{R_2^2} |(\omega'(0,9 e^{i\theta}))|^2 = / -0,0860 \cos \theta + 0,0187 \cos 2\theta + 0,2717 \cos 3\theta -$$

$$- 0,3758 \cos 4\theta + 0,3889 \cos 5\theta - 0,0050 \cos 6\theta - 0,0901 \cos 7\theta +$$

$$+ 0,1433 \cos 8\theta - 0,0800 \cos 9\theta +$$

$$+ 0,0384 \cos 11\theta - 0,0470 \cos 12\theta / + 1,0619. \quad (35)$$

Таблица 4

Напряжения по внешнему контуру сплошного сечения $R_1 = 1$; $R_2 = 0$

θ	τ_1	$\frac{1}{R} \omega'(e^{i\theta}) $	τ_1	$\frac{1}{p} \tau_{\theta}^{(p=1)}$
0	1,0352	1,0479	0,9878	0,639
10°	1,0370	1,0872	0,9538	0,617
20°	1,0175	1,0248	0,9929	0,642
30°	0,9971	0,9354	1,0660	0,639
40°	1,0104	1,0439	0,9679	0,626
45°	1,0139	1,0741	0,9440	0,611
50°	1,0079	1,0522	0,9579	0,620
60°	0,9863	0,9812	1,0052	0,650
70°	0,9702	0,9882	0,9818	0,635
80°	0,9389	0,8632	1,0877	0,703
90°	0,9305	0,8190	1,1361	0,735
100°	0,9519	0,8961	1,0623	0,687
110°	0,9754	0,7439	1,3112	0,848
120°	1,1181	1,1463	0,9754	0,631
130°	1,3439	1,7962	0,7482	0,484
135°	1,3871	1,9031	0,7289	0,471
140°	1,3490	1,8133	0,7439	0,481
150°	1,1265	1,2293	0,9164	0,593
160°	0,9517	0,7770	1,2248	0,792
170°	0,8766	0,6871	1,2758	0,825
180°	0,8474	0,5802	1,4605	0,945

$$p = \frac{M_K}{R^3}$$

Развернутые выражения, аналогичные (31), (32), (33) и (34) для сечений $R_1 = 1$ и $R_2 = 0$; 0,5 в настоящей работе не приводятся.

Окончательные результаты подсчетов для всех рассмотренных случаев помещены в таблицах 4, 5, 6 и рис. 1, 2, 3. [4, 5].

Таблица 5

Напряжения по внешнему и внутреннему контурам сечения $R_1 = 1$; $R_2 = 0,5$.

θ	Z_2	$\frac{1}{R} \omega' (0,5 e^{i\theta}) $	Z_1	η_2	η_1	$\frac{1}{P} \tau_{\theta}^{(p=0.5)}$	$\frac{1}{P} \tau_{\theta}^{(p=1)}$
0	0,4887	1,0102	1,0356	0,4838	0,9882	0,334	0,683
10°	0,5005	1,0093	1,0376	0,4959	0,9544	0,343	0,659
20°	0,4952	1,0066	1,0186	0,4920	0,9940	0,340	0,687
30°	0,5014	1,0032	0,9986	0,4998	1,0676	0,345	0,738
40°	0,5083	0,9993	1,0126	0,5087	0,9700	0,351	0,670
45°	0,5119	0,9972	1,0165	0,5133	0,9464	0,355	0,654
50°	0,5161	0,9949	1,0111	0,5187	0,9609	0,358	0,664
60°	0,5271	0,9897	0,9990	0,5326	1,0090	0,368	0,697
70°	0,5363	0,9848	0,9741	0,5446	0,9857	0,376	0,681
80°	0,5410	0,9825	0,9420	0,5506	1,0913	0,380	0,754
90°	0,5375	0,9849	0,9320	0,5457	1,1380	0,377	0,786
100°	0,5196	0,9938	0,9512	0,5228	1,0615	0,361	0,733
110°	0,4831	1,0089	0,9723	0,4788	1,3070	0,331	0,903
120°	0,4403	1,0256	1,1134	0,4293	0,9713	0,297	0,671
130°	0,4139	1,0357	1,3385	0,3996	0,7452	0,276	0,515
135°	0,4123	1,0356	1,3819	0,3981	0,7261	0,275	0,502
140°	0,4205	1,0313	1,3442	0,4077	0,7413	0,282	0,512
150°	0,4804	1,0126	1,1236	0,4744	0,9140	0,328	0,631
160°	0,5176	0,9863	0,9510	0,5248	1,2239	0,363	0,846
170°	0,5619	0,9669	0,8776	0,5811	1,2733	0,401	0,880
180°	0,5783	0,9594	0,8492	0,6028	1,4536	0,416	1,043

$$p = \frac{M_R}{R^3}$$

СЛУЧАЙ СЕЧЕНИЯ С ТРЕМЯ ОСЯМИ СИММЕТРИИ

(сечение треугольной формы)

Рассмотрим случаи кручения стержней сплошных и полых сечений, внешний контур которых имеет форму правильного криволинейного треугольника, полученного при отображении единичной окружности с помощью функции

$$\omega(\zeta) = R \sum_{\nu=0}^3 g_{3\nu+1} \cdot \zeta^{3\nu+1}, \quad (36)$$

Таблица 6

Напряжения по внешнему и внутреннему контурам сечения $R_1 = 1$; $R_2 = 0,9$.

θ	L_2	$\frac{1}{R} \omega' (0,9e^{i\theta}) $	L_1	η_2	η_1	$\frac{1}{p} \tau_{\theta}^{(\rho=0,9)}$	$\frac{1}{p} \tau_{\theta}^{(\rho=1)}$
0	0,9089	1,1338	1,0272	0,8016	0,9802	1,555	1,902
10°	0,9074	1,0926	1,0314	0,8304	0,9487	1,611	1,841
20°	0,9161	1,0056	1,0211	0,9110	0,9964	1,768	1,933
30°	0,9249	0,9201	1,0094	1,0052	1,1696	1,951	2,269
40°	0,9160	0,9467	1,0230	0,9676	0,9800	1,878	1,902
45°	0,9129	0,9760	1,0273	0,9353	0,9564	1,815	1,856
50°	0,9144	0,9954	1,0246	0,9183	0,9738	1,782	1,890
60°	0,9217	1,0255	1,0149	0,8987	1,0343	1,744	2,007
70°	0,9231	1,0351	1,0124	0,8918	1,0245	1,729	1,988
80°	0,9404	0,9605	0,9944	0,9791	1,1520	1,898	2,235
90°	0,9460	0,8767	0,9886	1,0790	1,2071	2,094	2,342
100°	0,9420	0,8314	0,9959	1,1330	1,1114	2,198	2,157
110°	0,9449	0,8183	0,9848	1,1547	1,3238	2,241	2,568
120°	0,8898	1,0881	1,0606	0,8178	0,9252	1,587	1,795
130°	0,7854	1,4460	1,1844	0,5432	0,6594	1,054	1,279
135°	0,7643	1,5177	1,2123	0,5036	0,6423	0,977	1,246
140°	0,7810	1,4862	1,1896	0,5255	0,6560	1,020	1,273
150°	0,8805	1,2027	1,0620	0,7321	0,8639	1,421	1,676
160°	0,9465	0,8927	0,9861	1,0603	1,2659	2,057	2,456
170°	0,9670	0,6931	0,9682	1,3952	1,4091	2,707	2,734
180°	0,9759	0,5943	0,9580	1,6421	1,6512	3,186	3,204

$$p = \frac{M_k}{R^3}$$

или в параметрическом виде

$$\begin{aligned}
 x &= R | \cos \theta + 0,1364 \cos 4\theta + 0,0567 \cos 7\theta + 0,321 \cos 10\theta | \\
 y &= R | \sin \theta + 0,1364 \sin 4\theta + 0,0567 \sin 7\theta + 0,321 \sin 10\theta | \quad (37)
 \end{aligned}$$

Внешние и внутренние контуры рассмотренных сечений определены точками, координаты которых подсчитаны для $R = 1,306$ и приведены в таблице 7.

Таблица 7

Координаты точек кривых $\rho = \text{const}$; $\theta = \text{const}$

θ	$\rho = 1,0$		$\rho = 0,5$		$\rho = 0,4$	
	x	y	x	y	x	y
0	1,600	0,0	0,653	0,0	0,517	0,0
10°	1,440	0,452	0,641	0,119	0,509	0,092
20°	1,161	0,655	0,605	0,231	0,483	0,180
30°	0,998	0,733	0,550	0,330	0,442	0,260
40°	0,877	0,854	0,482	0,416	0,398	0,331
50°	0,712	0,953	0,403	0,488	0,326	0,391
60°	0,580	1,004	0,316	0,547	0,254	0,440

На основании приведенных выше формул (19), (20) для $\rho = 3$ подсчитаны жесткости сечений, которые помещены в таблице 8.

Таблица 8

Жесткости сечений

Сечения	$-\frac{D_0}{\pi R^4}$	$\frac{I}{\pi R^4}$	$\frac{D}{G\pi R^4}$	$d = \frac{D}{GR^4}$
$R_1 = 1; R_2 = 0,$	0,0319	0,6165	0,5846	1,8364
$R_1 = 1; R_2 = 0,4$	0,0319	0,6037	0,5718	1,7962
$R_1 = 1; R_2 = 0,5$	0,0319	0,5852	0,5533	1,7381

Применяя зависимости (22) и (23) для $\rho = 3$, определены напряжения по контурам сечений, которые получаются при отображении колец радиусов $R_1 = 1; R_2 = 0,4$; а также $R_1 = 1; R_2 = 0,5$ (табл. 9).

Таблица 9

Напряжения по контурам сечений

$R_1 = 1; R_2 = 0,4$			$R_1 = 1; R_2 = 0,5$		
	L_1	L_2		L_1	L_2
θ	$\frac{1}{\rho} \tau_{\theta}^{(\rho=1)}$	$\frac{1}{\rho} \tau_{\theta}^{(\rho=0,4)}$	θ	$\frac{1}{\rho} \tau_{\theta}^{(\rho=1)}$	$\frac{1}{\rho} \tau_{\theta}^{(\rho=0,5)}$
0	0,390	0,214	0	0,403	0,267
10°	0,424	0,216	10°	0,438	0,275
50°	0,497	0,225	50°	0,514	0,289
60°	0,545	0,224	60°	0,542	0,285

СЛУЧАЙ СЕЧЕНИЯ С ЧЕТЫРЬМА ОСЯМИ СИММЕТРИИ

(сечение квадратной формы)

При отображении единичного круга с помощью функции

$$\omega(\zeta) = R \sum_{\nu=0}^3 g_{4\nu+1} \cdot \zeta^{4\nu+1} \quad (38)$$

(числовые значения коэффициентов $g_{4\nu+1}$ приведены в табл. 10), получаем правильный криволинейный четырехугольник, который будем считать внешним контуром ниже рассмотренных сечений.

Таблица 10

Коэффициенты отображающей функции

ν	0	1	2	3
$g_{4\nu+1}$	1,0807	-1,1080	0,0449	-0,0176

Координаты точек кривых $\rho = \text{const}$, $\Theta = \text{const}$ для $R_1 = 1$ и $R_2 = 0,5$ приведены в таблице 11.

Таблица 11

Координаты точек кривых $\rho = \text{const}$; $\Theta = \text{const}$.

Θ	$\rho = R_1 = 1$		$\rho = R_2 = 0,5$	
	x	y	x	y
0	1,0	0,0	0,537	0,0
10°	1,005	0,136	0,529	0,091
20°	0,992	0,281	0,508	0,182
30°	1,013	0,433	0,470	0,268
40°	0,990	0,725	0,417	0,348
45°	0,884	0,884	0,384	0,384

Применяя тот же способ решения, что и в предыдущих случаях, используя соответствующие формулы для $p = 4$ и опуская промежуточные действия, мы получили результаты, которые приводятся ниже.

Таблица 12

Жесткости сечений

Сечения	$-\frac{D_0}{R^4}$	$\frac{I}{R^4}$	$d = \frac{D}{GR^4}$
$R_1 = 1; R_2 = 0$	0,2295	2,5225	2,2930
$R_1 = 1; R_2 = 0,5$	0,2295	2,3888	2,1513

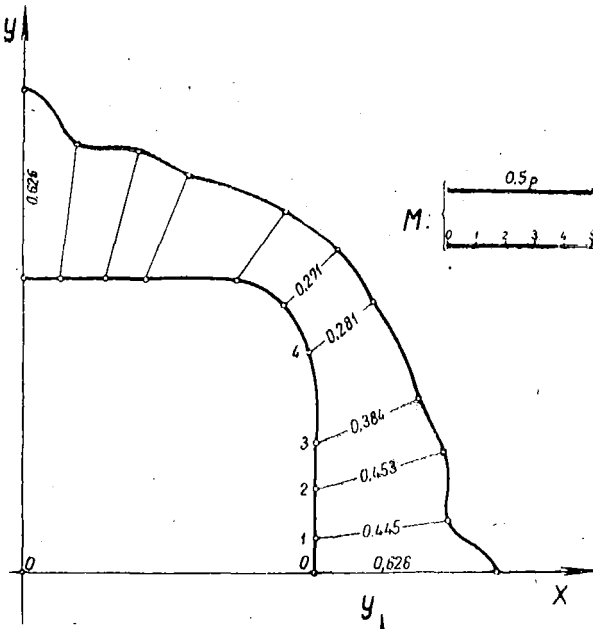


Рис. 6. Напряжения $\frac{\tau_{\theta}}{p}$ по контуру квадратного сплошного сечения. $R_1 = 1; R_2 = 0; p = \frac{M_k}{R^2}$.

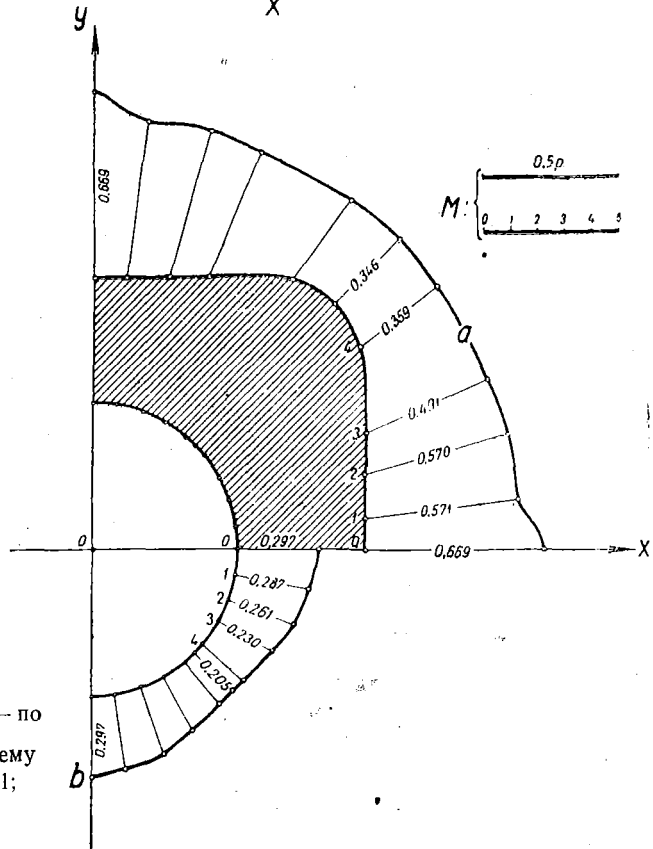


Рис. 7. Кривые $\frac{\tau_{\theta}}{p}$ a — по внешнему, b — по внутреннему контурам сечения $R_1 = 1; R_2 = 0,5$.

Ниже даны таблица 13 и графики (рис. 6 и 7) распределения напряжений по контурам сечений.

Как следует из таблицы 13, напряжения в точке O^0 (середина стороны квадрата) равно $0,626 \frac{M_k}{R^3}$ для $R = 1$; $a = 2$ (табл. 11).

Таблица 13

Напряжения по контурам сечений

$R_1 = 1; R_2 = 0$		$R_1 = 1; R_2 = 0,5$		
L_1		L_1		L_2
θ	$\frac{1}{p} \tau_{\theta}^{(\rho=1)}$	θ	$\frac{1}{p} \tau_{\theta}^{(\rho=1)}$	$\frac{1}{p} \tau_{\theta}^{(\rho=0,5)}$
0	0,626	0	0,669	0,297
10°	0,445	10°	0,571	0,287
20°	0,453	20°	0,570	0,261
30°	0,384	30°	0,471	0,230
40°	0,281	40°	0,359	0,208
45°	0,271	45°	0,346	0,205

При определении же напряжений для сплошного квадратного сечения (без скругленных углов), в точках, где действуют наибольшие касательные напряжения (середины сторон), имеем¹

$$\tau_{\max} = \frac{M_k}{0,208 a^3}.$$

Для $a = 2$ $\tau_{\max} = 0,601 M_k$. В нашем случае $\tau_{\max} = 0,626 M_k$.

Таким образом, расхождение между точным и приближенным решением, выраженное в процентах, составляет:

$$\delta = \frac{0,025 \cdot 100}{0,601} = 4\%.$$

ВЫВОДЫ

1. Из сводчатых сечений рассмотрены случаи сплошного, толстостенного и тонкостенного профилей.

Во всех случаях наибольшие напряжения, как для внешних, так и для внутренних контуров имеют место при $\theta = 180^\circ$.

2. В сечении треугольной формы — τ_{θ} возрастает к серединам сторон.

3. В сечении квадратной формы напряжения достигают максимума в серединах сторон квадрата.

В основном рассмотрены случаи толстостенных сечений, внутренние контуры которых близки к кругам.

¹ См. Н. М. Беляев. Сопротивление материалов, 1957, стр. 212.

ЛИТЕРАТУРА

1. Векуа И. И. и Рухадзе А. К. Кручение и изгиб поперечной силой бруса, составленного из двух упругих материалов, ограниченных конфокальными эллипсами. Прикладная математика и механика, т. 1, вып. 2, изд. АН СССР, 1933.
 2. Мелейт'ев П. В. Несколько новых методов и приемов приближенных вычислений, ОНТИ, 1937, стр. 96—117.
 3. Мусхелишвили Н. П. Некоторые основные задачи математической теории упругости, изд. АН СССР, 1954.
 4. Яковлева В. И. О кручении некоторых полых призматических стержней. Прикладная механика, т. II, в. 3, изд. АН УССР, 1956.
 5. Яковлева В. И. О кручении полого призматического стержня эллиптического сечения. Труды Грузин. политех. ин-та 1 (42), 1956.
-