Український поліграфічний інститут ім. Івана Федорова
Том XIII Наукові записки 1961

ПРО КРУЧЕННЯ ДЕЯКИХ ПОРОЖНИСТИХ СТЕРЖНІВ

В. І. ЯКОВЛЄВА

Хай задана функція $\omega(\zeta)$, що конформно відображує кільце, яке обмежене концентричними колами радіусів $R_1 = 1$ і $R_2 = 0{,}5$ на область S, зовнішній контур якої L_1, а внутрішній L_2.

Розглянемо кручення моментом M_k призматичного стержня, перерізом якого є згадана область S.

Визначимо напруження по контурах перерізу L_1 і L_2.

В одному з поперечних січень візьмемо систему координат x, y як на мал. 1.

Для визначення напружень в області S запишемо граничні умови в перетвореній області у вигляді [2]:

$$\left.\begin{aligned} R_e \frac{1}{i} F_k[\omega(\zeta)] &= \frac{1}{2}\omega(\zeta)\overline{\omega(\zeta)} + C_1 \text{ на } \gamma_1 \\ R_e = \frac{1}{i} F_k[\omega(\zeta)] &= \frac{1}{2}\omega(\zeta)\overline{\omega(\zeta)} + C_2 \text{ иа } \gamma_2 \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

де:

$$F_k = \varphi + i\psi$$

Співвідношення (1) можна представити у вигляді:

$$\left.\begin{aligned} R_e \frac{1}{i} f(\zeta) &= \frac{1}{2}\omega(R_1 e^{i\theta})\,\overline{\omega}(R_1 e^{-i\theta}) + C_1 \text{ на } \gamma_1 \\ R_e \frac{1}{i} f(\zeta) &= \frac{1}{2}\omega(R_2 e^{i\theta})\,\overline{\omega}(R_2 e^{-i\theta}) + C_2 \text{ на } \gamma_2 \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

де:

$$f(\zeta) = F_k[\omega(\zeta)]; \quad \zeta = \rho e^{i\theta}$$

Відображуюча функція [3] має вид:

$$\omega(\zeta) = R\sum_{\nu=0}^{n} g_{2\nu+1}\cdot\zeta^{2\nu+1}. \qquad (3)$$

Представимо функцію $\frac{1}{i}f(\zeta)$ у вигляді ряду Лорана [1]:

$$\frac{1}{i}f(\zeta)=a_0+ib_0+\sum_{k=1}^{\infty}[(a_k+ib_k)\rho^k(\cos k\Theta+i\sin k\Theta)+$$
$$+(a_{-k}+ib_{-k})\rho^{-k}(\cos k\Theta-i\sin k\Theta) \tag{4}$$

З рівнянь (2), (3), (4), після перетворень, шляхом порівняння коефіцієнтів при cos і sin, одержимо значення коефіцієнтів функції

$$f(\zeta)=i\sum_{t=1}^{\omega}(a_{2t}\zeta^{2t}+a^{-2t}\zeta^{-2t}) \tag{5}$$

де:

$$a_{2t}=R^2\sum_{\substack{\nu=0\\t=1}}^{n}\Gamma_{t\nu}\frac{1-R_2^{4\nu+4t+2}}{1-R_2^{4t}}$$

$$a_{-2t}=R^2\sum_{\substack{\nu=0\\t=1}}^{n}\Gamma_{t\nu}\frac{1-R_2^{4\nu+2}}{1-R_2^{-4t}}$$

$$n=1,2\ldots m$$

$$\Gamma_{t\nu}=g_{2\nu+1}\cdot g_{2\nu+2t+1}$$

Жорсткість при крученні

$$D=G(I+D_0) \tag{6}$$

Кут закручування

$$\vartheta=\frac{M_k}{D} \tag{7}$$

де: M_k — крутильний момент,
I — полярний момент інерції,
G — модуль зсуву.

Після всіх перетворень [1, 2, 4] одержимо вираження для полярного моменту інерції і D_0

$$I=\frac{\pi}{2}R^4\sum_{s=1}^{2}(-1)^{1+s}\left[\sum_{\substack{\nu=0\\t=1}}^{n}\Gamma_{t\nu}\cdot R_s^{4\nu+4t+2}\sum_{\substack{\nu=0\\t=1}}^{n}(4\nu+4t+2)\Gamma_{t\nu}R_s^{4\nu+2t+2}+\right.$$
$$\left.+\sum_{\nu=0}^{n}g_{2\nu+1}^2\cdot R_s^{4\nu+2}\sum_{\nu=0}^{n}(2\nu+1)g_{2\nu+1}^2\cdot R_s^{4\nu+2}\right] \tag{8}$$

і

$$D_0=\pi R^4\sum_{t=1}^{n}[c_{2t}^{(\rho=R_2)}\cdot b_{2t}^{(\rho=R_2)}-c_{2t}^{(\rho=1)}\cdot b_{2t}^{(\rho=1)}] \tag{9}$$

де:

$$c_{2t}^{(\rho)}=(a_{-2t}\rho^{-2t}-a_{2t}\rho^{2t})\frac{1}{R^2}$$

$$b_{2t}^{(\rho)}=-\sum_{\substack{\nu=0\\t=1}}^{n}t\cdot\Gamma_{t\nu}\cdot\rho^{4\nu+2t+2}$$

Для визначення напружень на контурах перерізів скористаємось формулою [2]

$$\tau_\rho - i\tau_\theta = \frac{G\vartheta\zeta}{\rho\,|\,\omega'(\zeta)\,|}\left[f'(\zeta) - i\overline{\omega(\zeta)}\,\omega'(\zeta)\right] \tag{10}$$

В силу (3) будемо мати

$$|\,\omega'(\zeta)\,|^2 = R^2\left[\sum_{\substack{\nu=0\\ t=1}}^{n} A_{t\nu}\cdot\Gamma_{t\nu}\cdot\cos 2t\Theta + \sum_{\nu=0}^{n} c_{A\nu}\cdot g_{2\nu+1}^2\right]. \tag{11}$$

де:

$$A_{t\nu} = (4\nu+2)(2\nu+2t+1)\,\rho^{4\nu+2t}$$

і

$$c_{A\nu} = (2\nu+1)\,\rho^{4\nu}$$

Застосовуючи (3) і (5), одержимо співвідношення для визначення напружень на контурах перерізів:

а) по зовнішньому контуру

$$\tau_\Theta^{(\rho=R_1=1)} = \frac{G\vartheta R^2}{|\,\omega'(\sigma_1)\,|}\left[\sum_{\substack{\nu=0\\ t=1}}^{n} B_{t\nu}^{(\rho=R_1=1)}\cdot\Gamma_{t\nu}\cos 2t\Theta + \sum_{\nu=0}^{n} c_{B\nu}^{(\rho=R_1=1)} g_{2\nu+1}^2\right]$$

де

$$B_{t\nu}^{(\rho=R_1=1)} = \frac{1}{1-R_2^{4t}}\left[4tR_2^{4\nu+4t+2} - (4\nu+4t+2)\,R_2^{4t} + (4\nu+2)\right]. \tag{12}$$

$$c_{B\nu}^{(\rho=R_1=1)} = 2\nu+1$$

б) по внутрішньому контуру

$$\tau_\Theta^{(\rho=R_2)} = \frac{G\vartheta R^2}{|\,\omega'(\sigma_2)\,|}\left[\sum_{\substack{\nu=0\\ t=1}}^{n} B_{t\nu}^{(\rho=R_2)}\cdot\Gamma_{t\nu}\cos 2t\Theta + \sum_{\nu=0}^{n} c_{B\nu}^{(\rho=R_2)}\cdot g_{2\nu+1}^2\right], \tag{13}$$

де:

$$B_{t\nu}^{(\rho=R_2)} = \frac{1}{1-R_2^{2t}}\left[(4\nu+4t+2)\,R_2^{4\nu+2t+1} - \right.$$

$$\left. - (4\nu+2)\,R_2^{4\nu+6t+1} - 4tR_2^{2t-1}\right]$$

$$c_{B\nu}^{(\rho=R_2)} = (2\nu+1)\,R_2^{4\nu+1}.$$

Коефіцієнти відображуючої функції (3) наведені в табл. 1.

Таблиця 1

Коефіцієнти відображуючої функції

ν	g_{2v+1}	ν	g_{2v+1}
0	1,0	5	—0,0054
1	0,1865	6	0,0168
2	—0,0041	7	0,0159
3	—0,0517	8	0,0031
4	—0,0374		

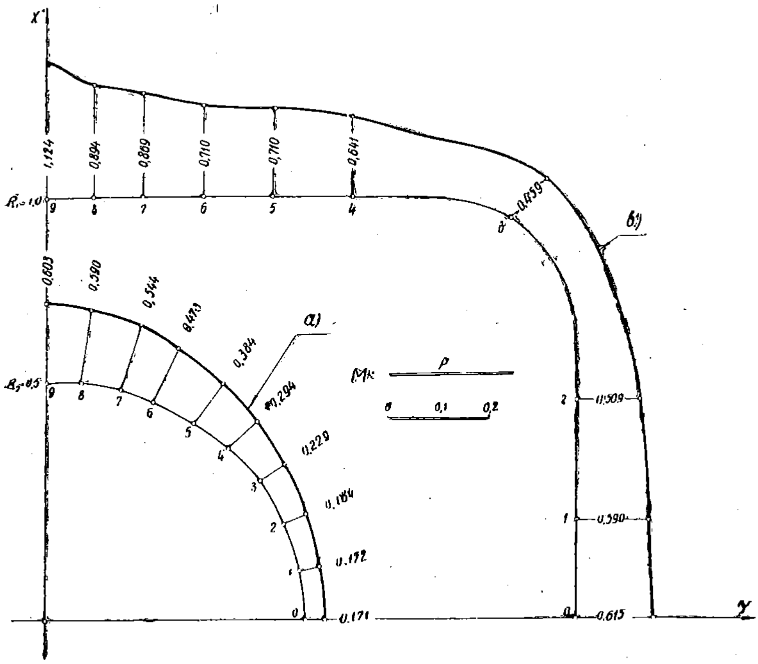
Згідно формул (6), (8), (9) зроблені підрахунки D_0, I і D, результати див. у табл. 2.

Після використання співвідношення (11), (12), (13), одержані напруження на зовнішньому і внутрішньому контурах перерізу, які наведені в табл. 3 і зображені на мал. 1.

Таблиця 2

Жорсткість суцільного і порожнистого перерізів

Січення	$-\frac{D_0}{R^4}$	$\frac{I}{R^4}$	$\frac{D}{GR^4}$	$d=\frac{GR^4}{D}$
$R_1=1;\ R_2=0{,}5$	0,3700	1,8198	1,4498	0,6898
$R_1=1;\ R_2=0$	0,3764	1,9195	1,5431	0,6481



Мал. 1.

Таблиця 3

Напруження по контурах перерізу

Θ	Зовнішній контур $^1/_p\ \tau^{(\rho=1)}$	Внутрішній контур $^1/_p\ \tau^{(\rho=0,5)}$
1	2	3
0°	0,615	0,171
10°	0,590	0,172
20°	0,509	0,184
30°	0,459	0,229
40°	0,641	0,294
50°	0,710	0,384
60°	0,710	0,473
70°	0,869	0,544
80°	0,894	0,590
90°	1,124	0,603

$$p=\frac{M_k}{R^3}.$$

На мал. 1 криві а) і в) являють собою напруження по внутрішньому і зовнішньому контурах перерізу.

Ординати відкладувались від відповідних контурів.

ВИСНОВКИ

Одержаний переріз має зовнішній обрис L_1 — у вигляді прямокутника із скругленими кутами, а внутрішній L_2 у вигляді еліпса.

Максимальні напруження на обох контурах мають місце при $\Theta = 90°$ (середина більшої сторони).

ЛІТЕРАТУРА

[1] И. Н. Векуа и А. К. Рухадзе. Кручение и изгиб поперечной силой бруса, составленного из двух упругих материалов, ограниченных конфокальными эллипсами. Прикладная математика и механика, т. I, в. 2, 1933.

[2] Н. П. Мусхелишвили. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд-во АН СССР, 1954.

[3] А. Г. Угодчиков. Электромоделирование задачи конформного преобразования круга на наперед заданную односвязную область. Украинский математический журнал № 2, 1955.

[4] В. И. Яковлева. Применение конформного отображения к решению некоторых задач кручения. Научные записки УПИ, т. 12, 1958.

Примітка. Ця робота надрукована в перекладі на російську мову в Наукових записках Азербайджанського університету, Баку, 1960.