УДК 512. 546

Н. М. Пирч
Українська академія друкарства

ПРО P-ВЛАСТИВІСТЬ У ПАРАТОПОЛОГІЧНИХ ГРУПАХ

Досліджуються властивість бути P-простором та споріднені з нею властивості для вільних об'єктів у категоріях топологічної алгебри.

P-властивість, вільна паратопологічна група, вільний добуток паратопологічних груп

Автором досліджуються топологічні властивості вільних паратопологічних груп та вільних добутків паратопологічних груп. Зокрема, встановлюються критерії, коли дані вільні об'єкти володіють властивістю бути P-простором та її узагальненням — властивістю бути P_λ-простором. Доведено також, що функтор вільного однорідного простору зберігає властивості бути P-простором, P_λ-простором, слабким простором та слабким P_λ-простором.

Термінологія і позначення взяті з [4] і [5]. Результати роботи доповідались у [3].

Нагадаємо, що паратопологічною групою називається пара (G,τ), де G — група, τ — топологія на G, причому відображення множення $m: G\times G \to G$, $m(x,y) \mapsto xy$ є неперервним (топологія τ називається при цьому напівгруповою). Якщо, крім того, операція переходу до оберненого елемента $x \mapsto x^{-1}$ є неперервною на G, то пара (G,τ) називається топологічною групою, а відповідна топологія — груповою.

Топологічний простір X називається P-простором, якщо довільна G_δ-множина у X є відкритою. Якщо X — топологічний простір з топологією τ, то можна означити нову топологію τ_Δ на X, базу якої утворюють усі G_δ-множини топології τ. Позначимо отриманий простір X_Δ. Для кожного топологічного простору X простір X_Δ є P-простором. Як показує таке твердження, простір X_Δ володіє універсальною властивістю серед P-просторів, а саме маємо наступне твердження.

Твердження 1. *Нехай X — топологічний простір. Для неперервного відображення $f: Y\to X$ з P-простору Y у топологічний простір X відповідне відображення $f_1: Y\to X_\Delta$ є також неперервним.*

<u>Доведення</u>. Нехай $f: X\to Y$ — неперервне відображення. Для неперервності відображення $f_1: Y\to X_\Delta$ достатньо показати, що прообраз довільного елемента бази простору X_Δ є відкритим у Y. Оскільки базу топології простору X_Δ утворюють G_δ-множини простору X, а прообраз G_δ-множини при неперервному відображенні є G_δ-множиною, то прообраз довільного елемента бази в X_Δ є G_δ-множиною в Y, а отже, за P-властивістю простору Y відкритою множиною в Y.

Твердження 2. *Зіставлення $X \mapsto X_\Delta$ визначає рефлексивний функтор з категорії топологічних просторів та їхніх неперервних відображень у категорію P-просторів і їхніх неперервних відображень.*

<u>Доведення</u>. Нехай $f: X \to Y$ — неперервне відображення. Для неперервності відображення $f_\Delta : X_\Delta \to Y_\Delta$ достатньо показати, що прообраз довільного елемента бази простору Y_Δ є відкритим у X_Δ. Оскільки базу топології простору Y_Δ утворюють G_δ-множини простору Y, а прообраз G_δ-множини при неперервному відображенні є G_δ-множиною, то прообраз довільного елемента бази у Y_Δ являє собою G_δ-множину в X, тобто відкриту множину в X_Δ.

Твердження 3 ([5, c. 449]). *Нехай (G, τ) — (пара)топологічна група. Тоді (G, τ_Δ) також (пара)топологічна група.*

<u>Доведення</u>. Нехай $m: (G,\tau) \times (G,\tau) \to (G,\tau)$ — неперервна бінарна операція. Подіявши на неї функтором Δ, отримаємо, що відображення m_Δ: $(G{\times}G, (\tau{\times}\tau)_\Delta) \to (G,\tau_\Delta)$ є також неперервним. Оскільки простір $(G \times G, (\tau \times \tau)_\Delta)$ природно гомеоморфний простору $(G \times G, \tau_\Delta \times \tau_\Delta)$, то $m_\Delta : (G, \tau_\Delta) \times (G, \tau_\Delta) \to (G, \tau_\Delta)$ — неперервна бінарна операція на групі G відносно топології τ_Δ. Якщо, крім того, операція інверсії $i : (G, \tau) \to (G, \tau)$ є неперервною, то, подіявши на неї функтором Δ, отримаємо, що операція інверсії $i_\Delta : (G, \tau_\Delta) \to (G, \tau_\Delta)$ також неперервна.

З тверджень 2 і 3 випливає

Твердження 4. *Зіставлення $(G,\tau) \mapsto (G, \tau_\Delta)$ визначає рефлексивний функтор з категорії (пара)топологічних груп та їхніх неперервних гомоморфізмів у категорію (пара)топологічних P-груп та їхніх неперервних гомоморфізмів.*

Для топологічного простору X позначимо через $F_p(X)$ вільну паратопологічну групу в сенсі Маркова топологічного простору X, через $A_p(X)$ — вільну абелеву паратопологічну групу в сенсі Маркова топологічного простору X (див. [11]), через $FG_p(X)$ — вільну паратопологічну групу в сенсі Граєва топологічного простору X, через $AG_p(X)$ — вільну абелеву паратопологічну групу в сенсі Граєва топологічного простору X (див. [12]).

У роботі [1] В. К. Бєльнов увів категорію однорідних просторів та їхніх неперервних морфізмів і встановив, що для кожного топологічного простору X існує вільний об'єкт у цій категорії — вільний однорідний простір $H(X)$. Нагадаємо, що топологія вільного простору — це фактортопологія, яка індукується відображенням f: $G(X) \times X \to H(X)$, означеним як $f((g, x)) = gx$ (тут — $G(X)$ підгрупа вільної групи $F(X)$ породжена множиною $\{xy^{-1} \in F(X) \,|\, x, y \in X\}$ і наділена дискретною топологією, а $H(X) = \{gx \in F(X) \,|\, g \in G,\ x \in X\}$) (див. [1]).

Теорема 1. *Для топологічного простору X еквівалентними є такі умови:*

1) *топологічний простір є P-простором;*

2) *вільний однорідний простір H(X) топологічного простору X є P-простором;*

3) *вільна паратопологічна група $F_p(X)$ у сенсі Маркова топологічного простору X є P-простором;*

4) *вільна абелева паратопологічна група $A_p(X)$ у сенсі Маркова топологічного простору X є P-простором;*

5) *вільна паратопологічна група* $FG_p(X)$ *у сенсі Граєва топологічного простору* X *є P-простором;*

6) *вільна абелева паратопологічна група* $AG_p(X)$ *у сенсі Граєва топологічного простору* X *є P-простором.*

Доведення. Імплікації 2) $\Rightarrow$ 1), 3) $\Rightarrow$ 1), 4) $\Rightarrow$ 1), 5) $\Rightarrow$ 1) та 6) $\Rightarrow$ 1) випливають з того, що підпростір P-простору є P-простором.

Доведемо імплікацію 1) $\Rightarrow$ 2). Нехай простір X є P-простором, а U — G_δ-множина у $H(X)$. Через те що відображення $f: G(X)\times X \to H(X)$ є неперервним, то $f^{-1}(U)$ — G_δ-множина у $G(X)\times X$. Таким чином, множина $f^{-1}(U)\cap\{g\}\times X$ є G_δ-множиною у $\{g\}\times X$ для кожного $g\in G(X)$. Оскільки для кожного $g\in G(X)$ простір $\{g\}\times X$ є гомеоморфним простору X, тобто є P-простором, то множина $f^{-1}(U)\cap\{g\}\times X$ відкрита у $\{g\}\times X$ для кожного $g\in G(X)$. Оскільки простір $G(X)\times X$ являє собою дискретну суму своїх підпросторів $\{g\}\times X$, то множина $f^{-1}(U)=\bigoplus_{g\in G(X)} f^{-1}(U)\cap\{g\}\times X$ відкрита в $G(X)\times X$. За факторністю відображення f отримаємо, що множина є U відкритою у $H(X)$.

Доведемо імплікацію 1) $\Rightarrow$ 3). Наше доведення аналогічне доведенню твердження 7.4.7 з [5]. Нехай $(F_p(X),\tau)$ — вільна паратопологічна група простору X. Тоді $(F_p(X),\tau_\Delta)$ — паратопологічна група, що індукує на X вихідну топологію і $\tau\subseteq\tau_\Delta$. Оскільки топологія вільної паратопологічної групи — найсильніша напівгрупова топологія, що індукує на X вихідну топологію, то $\tau=\tau_\Delta$, а отже, топологічний простір $(F_p(X),\tau)$ є P-простором.

Імплікації 1) $\Rightarrow$ 4), 1) $\Rightarrow$ 5), 1) $\Rightarrow$ 6) доводяться за аналогічною схемою.

Нехай $F_p(X)_n$ — множина слів паратопологічної групи $F_p(X)$, довжина яких у нескоротній формі не перевищує n. Аналогічно до твердження 7.4.8 з [5] доведемо наступний наслідок.

Наслідок 1. *Нехай* X — T_1*-простір, що є P-простором. Тоді паратопологічна група* $F_p(X)$ *володіє топологією індуктивної границі відносно своїх підпросторів* $F_p(X)_n$*.*

Доведення. Нехай U — множина, така, що перетин $U_n=U\cap F_p(X)_n$ є замкненою множиною у $F_p(X)_n$ для всіх натуральних значень n. Як було встановлено в [6], для кожного T_1-простору, множини $F_p(X)_n$ є замкненими у $F_p(X)$. Отже, множини U_n є замкненими у $F_p(X)$. А тому множина $U=\bigcup_{n=1}^{\infty}U_n$ є F_σ-множиною. Оскільки для P-простору X вільна паратопологічна група $F_p(X)$ є також P-простором, то F_σ-множина U замкнена у $F_p(X)$.

Зауваження 1. *Твердження, аналогічне до наслідку 1, для вільної абелевої паратопологічної групи* $A_p(X)$ *випливає з результатів роботи* [11].

Многовидом (див. [7]) називається клас топологічних груп, замкнений відносно добутків, підгруп і факторгруп. Многовид V називається повним, якщо разом з довільною топологічною групою (G,τ) містить усі інші топологічні групи, алгебраїчні носії яких збігаються з алгебраїчним носієм групи (G,τ). Для тихоновського простору X і многовиду V позначатимемо через $F(X,V)$ вільну групу простору X у многовиді V. Як було встановлено у [8], якщо V — повний многовид, то для кожного тихоновського простору X вільна топологічна група $F(X,V)$ існує.

Аналогічно до теореми 1 доводиться наступна теорема.

Теорема 2. *Нехай V — повний многовид, X — тихоновський простір. Простір X є P-простором тоді і тільки тоді, коли вільна топологічна група $F(X,V)$ є P-простором.*

Означення 1 ([2]). *Нехай $\{G_i : i \in I\}$ — сім'я паратопологічних груп. Паратопологічну групу G називатмемо вільним топологічним добутком сім'ї груп $\{G_i : i \in I\}$ (позн. $\prod_{i\in I}{}^{*} G_i$), якщо виконано умови:*

1) група G містить групи G_i як свої підгрупи;

2) мінімальна підгрупа групи G, що містить у собі всі підгрупи G_i збігається з G;

3) якщо для кожного $i \in I$ існує неперервний гомоморфізм $f_i : G_i \to H$ з паратопологічної групи G_i у паратопологічну групу H, то існує неперервний гомоморфізм f з паратопологічної групи G у паратопологічну групу Hтакий, що $f|_{G_i} = f_i$ для всіх $i \in I$.

Теорема 3. *Вільний добуток $\prod_{i\in I}{}^{*} G_i$ сім'ї паратопологічних груп $\{G_i : i \in I\}$ є P-простором тоді і тільки тоді, коли усі співмножники G_i є P-просторами.*

<u>Доведення</u>. Необхідність випливає з того, що підпростір P-простору є P-простором.

Достатність. Нехай $\{G_i : i \in I\}$ — сім'я паратопологічних груп, які є P-просторами, $\left(\prod_{i\in I}{}^{*} G_i, \tau\right)$ — їхній вільний топологічний добуток. Тоді пара $\left(\prod_{i\in I}{}^{*} G_i, \tau_\Delta\right)$ є паратопологічною групою, яка індукує на групах $\{G_i : i \in I\}$ їхні вихідні топології, причому $\tau \subseteq \tau_\Delta$. Оскільки топологія вільного добутку — найсильніша напівгрупова топологія, що індукує на співмножниках вихідні топології, то $\tau = \tau_\Delta$, а отже, топологічний простір $\left(\prod_{i\in I}{}^{*} G_i, \tau\right)$ є P-простором.

Для многовиду V та сім'ї $\{G_i : i \in I\}$ топологічних груп з многовиду V через $V\prod_{i\in I}{}^{*} G_i$ позначається вільний V-добуток сім'ї $\{G_i : i \in I\}$ у многовиді V (див. [9]).

Аналогічно до теореми 3 справедливою є наступна теорема.

Теорема 4. *Нехай V — повний многовид, $\{G_i : i \in I\}$ −сім'я топологічних груп з многовиду V. Вільний топологічний V-добуток $\prod_{i\in I}{}^{*} G_i$ сім'ї паратопологічних груп $\{G_i : i \in I\}$ є P–простором тоді і тільки тоді, коли усі співмножники G_i є P-просторами.*

Означення 2. *Нехай λ — нескінченний кардинал. Топологічний простір X називається P_λ-простором, якщо довільної сім'ї $\{U_i : i \in I\}$ відкритих множин, такої, що $|I| \leq \lambda$, перетин $\bigcap_{i\in I} U_i$ є відкритою множиною в X.*

Зауваження 2 (див. [13]). *Нехай λ — нескінченний кардинал. За аналогією до випадку P-просторів для топологічного простору X можемо означити топологію τ_λ, базу якої утворюють множини вигляду $U = \bigcap_{i\in I} U_i$, де $|I| \leq \lambda$, $U_i \in \tau$. Справедливими для цієї конструкції будуть аналоги тверджень 1−4, встановлених вище.*

За аналогією до випадку -просторів можемо довести наступну теорему.

Теорема 5. *Нехай λ — нескінченний кардинал. Наступні умови є еквівалентними для топологічного простору X:*

1) топологічний простір X є P_λ-простором;

2) вільний однорідний простір $H(X)$ топологічного простору X є P_λ-простором;

3) вільна паратопологічна група $F_p(X)$ у сенсі Маркова топологічного простору є P_λ-простором;

4) вільна абелева паратопологічна група $A_p(X)$ у сенсі Маркова топологічного простору є P_λ-простором;

5) вільна паратопологічна група $FG_p(X)$ у сенсі Граєва топологічного простору є P_λ-простором;

6) вільна абелева паратопологічна $AG_p(X)$ група у сенсі Граєва топологічного простору є P_λ-простором.

Топологічні простори X та Y називаються M_p-еквівалентними, якщо вільні паратопологічні групи $F_p(X)$ та $F_p(Y)$ є топологічно ізоморфними.

Наслідок 1. *Для довільного нескінченного кардиналу λ властивість бути P_λ-простором зберігається відношенням M_p-еквівалентності.*

Аналогічно до теорем 3 і 4 справедливими є наступні дві теореми.

Теорема 6. *Нехай λ — нескінченний кардинал. Вільний добуток $\prod_{i\in I}^{*} G_i$ сім'ї паратопологічних груп $\{G_i : i \in I\}$ є P_λ-простором тоді і тільки тоді, коли усі співмножники G_i є P_λ-просторами.*

Теорема 7. *Нехай λ — нескінченний кардинал, V — повний многовид, $\{G_i : i \in I\}$ — сім'я топологічних груп з многовиду V. Вільний V-добуток $\prod_{i\in I}^{*} G_i$ сім'ї паратопологічних груп $\{G_i : i \in I\}$ є P_τ-простором тоді і тільки тоді, коли усі співмножники G_i є P_τ-просторами.*

Означення 3 ([10]). *Топологічний простір X називається слабким P-простором, якщо довільна зліченна множина в X є замкненою.*

Теорема 8. *Вільний однорідний простір $H(X)$ топологічного простору X є слабким P-простором тоді і тільки тоді, коли топологічний простір X є слабким P-простором.*

Доведення. Необхідність випливає з того, що підпростір слабкого P-простору є слабким P-простором.

Достатність. Нехай простір X є слабким P-простором, а U — зліченна множина в $H(X)$. Тоді множина $f^{-1}(U) \cap \{g\} \times X$ є зліченною множиною у $\{g\} \times X$ для кожного $g \in G(X)$. Оскільки для кожного $g \in G(X)$ простір $\{g\} \times X$ гомеоморфний простору X, тобто є слабким P-простором, то зліченна множина $f^{-1}(U) \cap \{g\} \times X$ є замкненою у $\{g\} \times X$ для кожного $g \in G(X)$. Через те що $G(X) \times X$ являє собою дискретну суму своїх підпросторів $\{g\} \times X$, то множина $f^{-1}(U) = \bigoplus_{g \in G(X)} f^{-1}(U) \cap \{g\} \times X$ є замкненою у $G(X) \times X$. За факторністю відображення f отримаємо, що множина U є замкненою в $H(X)$.

Означення 4. Нехай λ — нескінченний кардинал. Топологічний простір X називається слабким P_λ-простором, якщо довільна множина потужності $\leq \lambda$ у X є замкненою.

За аналогією до теореми 8 доводиться наступна теорема.

Теорема 9. *Нехай λ — нескінченний кардинал. Вільний однорідний простір $H(X)$ топологічного простору X є слабким P_λ-простором тоді і тільки тоді, коли топологічний простір X є слабким P_λ-простором.*

1. Бельнов В. К. Размерность топологически однородных пространств и свободные однородные пространства / В. К. Бельнов // Докл. АН СССР. — 1978. — Т. 238. — №4. — С. 781−784. 2. Пирч Н.М. Вільні добутки паратопологічних груп / Н. М. Пирч // Математичні студії. — 2010. — Т.33. — №2. – P.139−146. 3. Пирч Н.М. Про P-властивість у паратопологічних групах / Н. М. Пирч // Тез. доп. 13-ої міжн. наук. конф. ім. акад. М.Кравчука. Ч.2. — К., 2010. — С. 215. 4. Энгелькинг Р. Общая топология / Р. Энгелькинг. — М.: Мир, 1986. — 751 с. 5. Arhangel'ski A. Topological Groups and Related Structures/ A. Arhangel'ski, M. Tkachenko. — Amsterdam-Paris: Atlantis Press, 2008. — 781 p. 6. Elfard A.S. On the topology of free paratopological groups / A. S. Elfard, P. Nickolas // www. arxiv.org: 1009.1676v1. 7. Morris S.A. Varieties of topological groups / S.A. Morris// Bull. Austr. Math. Soc. — 1969.– 1. — p. 145−160. 8. Morris S.A. Varieties of topological groups II / S. A. Morris // Bull. Austr. Math. Soc. — 1970.– 2. — p. 1−13. 9. Morris S.A. Free products of topological groups / S. A. Morris // Bull. Austr. Math. Soc. — 1971.– 4. — p. 17−29. 10. McGovern W.W. Free topological groups of weak P-spaces /W. W. McGovern // Topol. Appl. 112, 2001, p 175−180. 11. Pyrch N.M. On free paratopological groups / N. M. Pyrch, O. V. Ravsky // Matematichni Studii.– 2006. — V. 25, — №2 — p. 115−125. 12. Romaguera S. Free paratopological groups / S. Romaguera, M. Sanchis, M. Tkachenko // Topology Proc.– 2002. –V.27. — С. 1−28. 13. Tkachenko M. Cellularity and the index of narrowness in topological groups / M. Tkachenko // Comment. Math. Univ. Carollin. — 2011. –V. 52. — №2.− p. 309−315.

О P-СВОЙСТВЕ В ПАРАТОПОЛОГИЧЕСКИХ ГРУППАХ

Исследуются свойство быть P-пространством, а также близкие к нему свойства, для свободных объектов в категориях топологической алгебры.

ON P-PROPERTY IN PARATOPOLOGICAL GROUPS

In the paper we investigate the property of being P-space and related properties for free objects in the categories of topological algebra.

Стаття надійшла 28.09.2011

УДК 655.326.1+66-7

В. Ф. Кохан, О. В. Мельников, Ю. А. Кукура
Українська академія друкарства

УПРАВЛІННЯ ЯКІСТЮ ОЧИЩЕННЯ АНІЛОКСОВИХ ВАЛІВ ФЛЕКСОГРАФІЧНИХ ДРУКАРСЬКИХ МАШИН*

Розглядається управління якістю очищення анілоксових валів як підсистема загальної системи управління якістю на підприємстві шляхом виділення факторів, які впливають на перебіг процесу, що дозволить прогнозувати його результати.

Анілоксові вали, флексографічні друкарські машини, управління якістю очищення

Головне завдання очищення анілоксових валів на підприємствах, які виготовляють продукцію флексографічним способом друку, — досягнення їх необхідної чистоти з одночасним збереженням самого вала [1, 4, 13]. Одним з основних способів очищення валів є ультразвуковий [6–10]. Якість процесу отримання необхідної чистоти поверхні вала при цьому залежить від багатьох факторів та умов.

Контроль чистоти робочої поверхні анілоксового вала слід здійснювати на всіх етапах експлуатації, включаючи контроль стану поверхні при початковому використанні вала, у процесі його роботи та після закінчення друкування. Належна організація контролю чистоти валів — необхідна передумова отримання друкованої продукції відповідної якості. Однак для цього потрібно знати, як організувати систему контролю якості очищення та які режими необхідно перевіряти при змиванні анілоксових валів [1, 4, 13].

Метою даної роботи є аналіз взаємовпливу та виявлення взаємозв'язків між факторами й умовами, які діють певним чином на остаточне очищення анілоксових валів.

Ретельний контроль чистоти робочої поверхні анілоксового вала до та після використання, під час і після очищення дає змогу виявити перешкоди, які в подальшому призводять до неналежної якості друкованої продукції. На етапі підготовки анілоксового вала до використання слід ретельно контролювати відповідність початкових заданих режимів процесу і характеристик анілоксового вала та друкарського обладнання, на яке він встановлюється. Для отримання об'єктивної інформації про очищення треба визначати: характеристики

---

* При написанні статті використано матеріали люб'язно надані професором д-ром техн. наук Оленою Михайлівною Величко.