

УДК 539.3

**ОСОБЛИВОСТІ УТОЧНЕНОГО РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧІ
ПРО НАПРУЖЕНИЙ СТАН БАЛКИ З ПОЗДОВЖНЬОЮ ТРІЩИНОЮ**О. Г. Гуртовий¹, Д. В. Жук¹, Л. С. Угрин²¹Національний університет водного господарства
та природокористування,

бул. Соборна, 11, м. Рівне, 33028, Україна,

²Українська академія друкарства,

бул. Підголоско, 19, Львів, 79020, Україна

Розв'язано задачу згину трансверсально-ізотропної балки з обмеженою поздовжньою тріщиною за уточненою моделлю при допомозі варіаційного методу Лагранжа. Результати порівнювалися з експериментальними даними. Проведено аналіз впливу тріщини на напружено-деформований стан балки та оцінено вплив застосованої кінематичної моделі на точність виконання умов спряження в перерізі на краю тріщини.

Ключові слова: балка, згин, поздовжня тріщина.

Постановка проблеми. При виготовленні або в процесі експлуатації різних конструкцій (наприклад, дерев'яних, клеєних, композитних волокнистих) можливе виникнення в них різноманітних тріщин, зокрема внутрішніх поздовжніх. Поява в балках і пластинах поздовжніх міжфазних тріщин, тріщин розшарувань може суттєво впливати на їх міцність, разом з тим ускладнюються математичні підходи в розрахунку таких елементів конструкцій порівняно з бездефектними.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Задача поперечного згину трансверсально-ізотропної балки з поздовжньою тріщиною з розкриттям її берегів розв'язана в класичній [1; 2] постановці при наближеному виконанні в перерізах на краю тріщини умов спряження частин балки. Задачу циліндричного згину плити з тунельною тріщиною без розкриття її берегів з урахуванням деформації поперечного зсуву та обтиснення розв'язано аналітично в [3], а також здійснено порівняння з розрахунком плоскої задачі за дуальним методом граничних елементів. Результати експериментальних досліджень напружено-деформованого стану (НДС) і прогинів дерев'яних балок з тріщинами [4] досить добре узгоджувались з розв'язком задачі методом скінченних елементів з використанням на краю тріщини сингулярних скінченних елементів [4]. На проблеми застосування в таких задачах багатошарових континуальних за товщиною скінченних елементів, де тонкий податливий шар моделює тріщину, вказано в [5]; у [6] запропоновано використовувати метод скінченних елементів (МСЕ).

Мета статті. Отримання розв'язку задачі, в якому інтегрально виконуються умови спряження (кінематичні і статичні) на краю поздовжньої тріщини для переміщень, нормальних і дотичних напруг; оцінка впливу на НДС балки прийнятих гіпотез.

Виклад основного матеріалу дослідження. Ставиться задача отримати уточнений аналітично-чисельний розв'язок для НДС зігнутої поперечним навантаженням трансверсально-ізотропної балки з поздовжньою тріщиною без

розкриття її берегів. Балка довжиною $L = 2m$ – шарнірно оперта на краях (див. рисунок). До балки прикладено рівномірно розподілене поперечне навантаження інтенсивністю q . Утворилася поздовжня симетрична відносно середини прогону балки наскрізна тріщина довжиною $l = 2b = 2(m - a)$ обмеженої довжини, яка не виходить на торці балки. З кожного краю балки частина довжиною $a = m - b$ залишається суцільною. Далі для зручності початок системи координат розмістимо на краю тріщини і розглянемо, у зв'язку із симетрією, половину балки ($-a \leq x \leq b$). Вісь Ox збігається з тріщиною. Зауважимо, що розглядається окремий випадок, коли тріщина знаходиться посередині висоти балки ($z = 0$, де $-h/2 \leq z \leq h/2$).

Досліджувана половина балки у вертикальній площині поділена на чотири області $j=1,4$. Частини $j=1,2$ на ділянці без тріщини (в області $-a < x < 0$) утворені розділенням горизонтальною площиною, що відповідає умовному продовженню тріщини, а частини $j=3,4$ знаходяться, відповідно, над і під тріщиною в області $0 < x < b$.

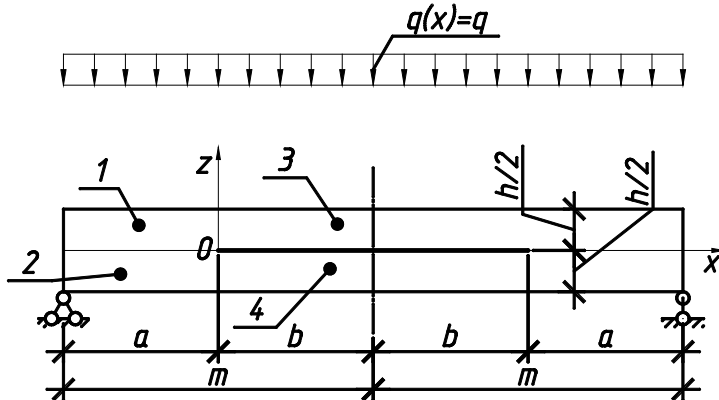


Рис. Схема балки з обмеженою внутрішньою поздовжньою тріщиною

Для кожної з частин $j=1,4$ застосовано уточнену кінематичну модель для горизонтальних u_j та вертикальних v_j зміщень з урахуванням деформації поперечного зсуву γ_{zx} у вигляді гіпотез:

$$\begin{aligned} u_j &= u_{0j}(x) - z \cdot w_{j,zx} - \psi_{1j}(z) \cdot \chi_{j,zx} + \psi_{2j}(z) \cdot \gamma_{0j}, \\ v_j &= w_j(x); \quad \gamma_{zx} = -\varphi_{1j}(z) \cdot \chi_{j,zx} + \varphi_{2j}(z) \cdot \gamma_{0j}, \end{aligned} \tag{1}$$

де $\gamma_{0j}(x)$, $\chi_j(x)$ — шукані функції поперечного зсуву; $w_j(x)$, $u_{0j}(x)$ — відповідно, функції прогинів і горизонтальних зміщень на координатній поверхні в j -й області. Тут і надалі окремі похідні позначатимуться нижніми індексами після коми. Уведено гіпотетичні функції $\varphi_{1j}(z)$, $\varphi_{2j}(z)$ де $\varphi_{1j}(z)$ задано поліномами другого степеня від z , а $\varphi_{2j}(z)$ — поліномами першого степеня від z у вигляді

$$\begin{aligned} \varphi_{11}(z) = \varphi_{13}(z) &= \frac{E}{2G'} \cdot (h_1 \cdot z - z^2); & \varphi_{12}(z) = \varphi_{14}(z) &= \frac{E}{2G'} \cdot (h_1 \cdot z + z^2); \\ \varphi_{21}(z) = \varphi_{23}(z) &= 1 - \frac{z}{h_1}; & \varphi_{22}(z) = \varphi_{24}(z) &= 1 + \frac{z}{h_1}; \end{aligned}$$

$$\psi_{ij}(z) = \int_0^z \phi_{ij}(z) dz; \quad (2)$$

$$\psi_{11}(z) = \psi_{13}(z) = \frac{E}{2G'} \cdot \left(h_1 \cdot \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3} \right); \quad \psi_{12}(z) = \psi_{14}(z) = \frac{E}{2G'} \cdot \left(h_1 \cdot \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} \right);$$

$$\psi_{21}(z) = \psi_{23}(z) = z - \frac{z^2}{2 \cdot h_1}; \quad \psi_{22}(z) = \psi_{24}(z) = z + \frac{z^2}{2 \cdot h_1},$$

де $h_1 = h/2$ — висота кожної ділянки; E і G' — відповідно, модуль пружності уздовж осі x і модуль зсуву матеріалу в площині xz .

Осьові деформації мають такий вигляд:

$$\varepsilon_{xj} = u_{j,x} = u_{0j}(x)_{,x} - z \cdot w_{j,xx} - \psi_{1j}(z) \cdot \chi_{j,xx} + \psi_{2j}(z) \cdot \gamma_{0j,x}; \quad \varepsilon_{zj} = 0, \quad (3)$$

а напруги описуються за законом Гука:

$$\sigma_{xj} = E \cdot \varepsilon_{xj}; \quad \tau_{xj} = G' \cdot \gamma_{zj}; \quad \sigma_{zj} = 0. \quad (4)$$

Ураховуючи симетрію балки та відсутність розкриття тріщини, приймаємо:

$$u_{01}(x) = u_{02}(x), \quad \gamma_{01}(x) = \gamma_{02}(x),$$

$$w_1(x) = w_2(x), \quad w_3(x) = w_4(x). \quad (5)$$

На ділянках 3 і 4 приймаємо функцію зсуву

$$\gamma_{03}(x) = \gamma_{04}(x) = 0. \quad (6)$$

Дотичні напруги на верхній і нижній гранях балки й на поверхнях тріщини дорівнюють нулю. Функція $\gamma_{0j}(x)$ забезпечує в гіпотезах для областей 1 і 2 нерозривність дотичних напруг на поверхні спряження цих областей. Причому на поверхні $z=0$, що збігається з площиною тріщини, $\gamma_{zj} = \gamma_{0j}$.

Розрахункову систему диференціальних рівнянь отримано варіаційним методом Лагранжа:

$$\delta \Pi = \sum_j (\delta W + \delta A + \delta A^*)_j = 0, \quad (7)$$

де δW — варіація внутрішньої енергії деформування; δA — робота навантаження на горизонтальній поверхні; δA^* — робота навантаження на торцях.

Система диференціальних рівнянь після розділення невідомих розпадається на чотири незв'язані системи, які мають наступний вигляд:

$$\begin{cases} 2 \cdot D_1 \cdot u_{01,xx} + D_3 \cdot (\chi_1 + \chi_2)_{,xxx} = 0; \\ 2 \cdot D_3 \cdot u_{01,xxx} + D_8 \cdot (\chi_1 + \chi_2)_{,xxxx} - D_{10} \cdot (\chi_1 + \chi_2)_{,xx} = 0. \end{cases} \quad (8)$$

$$\begin{cases} 2 \cdot D_5 \cdot w_1{}_{,xxxx} + D_6 \cdot (\chi_1 - \chi_2)_{,xxxx} + 2 \cdot D_7 \cdot \gamma_{01}{}_{,xxx} = q; \\ 2 \cdot D_6 \cdot w_1{}_{,xxxx} + D_8 \cdot (\chi_1 - \chi_2)_{,xxxx} - D_{10} \cdot (\chi_1 - \chi_2)_{,xx} + \\ + 2 \cdot D_9 \cdot \gamma_{01}{}_{,xxx} - 2 \cdot D_{11} \cdot \gamma_{01}{}_{,x} = 0; \\ - 2 \cdot D_7 \cdot w_1{}_{,xxx} - D_9 \cdot (\chi_1 - \chi_2)_{,xxx} + \\ + D_{11} \cdot (\chi_1 - \chi_2)_{,x} - 2 \cdot D_{13} \cdot \gamma_{01}{}_{,xx} + 2 \cdot D_{12} \cdot \gamma_{01} = 0. \end{cases} \quad (9)$$

$$\begin{cases} D_1 \cdot (u_{03} + u_{04})_{,xx} + D_3 \cdot (\chi_3 + \chi_4)_{,xxx} = 0; \\ D_3 \cdot (u_{03} + u_{04})_{,xxx} + D_8 \cdot (\chi_3 + \chi_4)_{,xxxx} - D_{10} \cdot (\chi_3 + \chi_4)_{,xx} = 0. \end{cases} \quad (10)$$

$$\begin{cases} D_1 \cdot (u_{03} - u_{04})_{,xx} + 2 \cdot D_2 \cdot w_3{}_{,xxx} + D_3 \cdot (\chi_3 - \chi_4)_{,xxx} = 0; \\ D_2 \cdot (u_{03} - u_{04})_{,xxx} + 2 \cdot D_5 \cdot w_3{}_{,xxxx} + D_6 \cdot (\chi_3 - \chi_4)_{,xxxx} = q; \\ D_3 \cdot (u_{03} - u_{04})_{,xxx} + 2 \cdot D_6 \cdot w_3{}_{,xxxx} + D_8 \cdot (\chi_3 - \chi_4)_{,xxxx} - \\ - D_{10} \cdot (\chi_3 - \chi_4)_{,xx} = 0. \end{cases} \quad (11)$$

Тут характеристики жорсткості набувають вигляду

$$D_4 = E \cdot b_0 \cdot \frac{h^2}{3}; D_5 = E \cdot b_0 \cdot \frac{h^3}{3}; D_6 = 7 \cdot E^2 \cdot b_0 \cdot \frac{h^5}{240 \cdot G}; \quad (12)$$

Аналітичний загальний розв'язок систем диференціальних рівнянь (8)–(11) отримуємо у вигляді наступних виразів шуканих функцій (кількість невідомих змінених у гіпотезах – 10):

$$u_{01} = 0; \quad \chi_1 + \chi_2 = 0;$$

$$u_{03} + u_{04} = 0; \quad \chi_3 + \chi_4 = 0;$$

$$\begin{aligned} \chi_1 - \chi_2 = & c_{11} \cdot ch(\alpha_1 x) + c_{21} \cdot sh(\alpha_1 x) + c_{31} \cdot ch(\alpha_2 x) + c_{41} \cdot sh(\alpha_2 x) + \gamma_{31} \cdot x^2 + \\ & + \gamma_{41} \cdot x + \gamma_{51}; \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} w_1 = & B_{21} \cdot (c_{11} \cdot ch(\alpha_1 x) + c_{21} \cdot sh(\alpha_1 x)) + B_{22} \cdot (c_{31} \cdot ch(\alpha_2 x) + c_{41} \cdot sh(\alpha_2 x)) + \\ & + \frac{q \cdot x^4}{48 \cdot D_5} + \beta_{21} \cdot x^3 + \beta_{31} \cdot x^2 + \beta_{41} \cdot x + \beta_{51}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_{01} = & B_{51} \cdot (c_{11} \cdot sh(\alpha_1 x) + c_{21} \cdot ch(\alpha_1 x)) + B_{52} \cdot (c_{31} \cdot sh(\alpha_2 x) + c_{41} \cdot ch(\alpha_2 x)) + \\ & + k_{11} \cdot x + k_{21}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{03} - u_{04} = & B_{13} \cdot (c_{13} \cdot sh(\alpha_3 x) + c_{23} \cdot ch(\alpha_3 x)) + \\ & + k_{13} \cdot x^3 + k_{23} \cdot x^2 + k_{33} \cdot x + k_{43}; \end{aligned}$$

$$\chi_3 - \chi_4 = c_{13} \cdot ch(\alpha_3 x) + c_{23} \cdot sh(\alpha_3 x) + n_{33} \cdot x^2 + n_{43} \cdot x + n_{53};$$

$$\begin{aligned} w_3 = & B_{23} \cdot (c_{13} \cdot ch(\alpha_3 x) + c_{23} \cdot sh(\alpha_3 x)) + \\ & + m_{13} \cdot x^4 + m_{23} \cdot x^3 + m_{33} \cdot x^2 + m_{43} \cdot x + m_{53}; \end{aligned}$$

де
$$\alpha_1 = \sqrt{\frac{-B + \sqrt{B^2 - 4 \cdot A \cdot C}}{2 \cdot A}}; \quad \alpha_2 = \sqrt{\frac{-B - \sqrt{B^2 - 4 \cdot A \cdot C}}{2 \cdot A}};$$

$$A = 2 \cdot D_6 \cdot D_7 \cdot D_9 + D_5 \cdot D_8 \cdot D_{13} - D_7^2 \cdot D_8 - D_6^2 \cdot D_{13} - D_5 \cdot D_9^2;$$

$$B = 2 \cdot D_5 \cdot D_9 \cdot D_{11} - D_5 \cdot D_{10} \cdot D_{13} + D_7^2 \cdot D_{10} - 2 \cdot D_6 \cdot D_7 \cdot D_{11} - D_5 \cdot D_8 \cdot D_{12} + D_6^2 \cdot D_{12};$$

$$\begin{aligned}
C &= D_5 \cdot D_{10} \cdot D_{12} - D_5 \cdot D_{11}^2; \\
B_{2i} &= \frac{(D_6 \cdot D_9 - D_7 \cdot D_8) \cdot \alpha_i^2 + D_7 \cdot D_{10} - D_6 \cdot D_{11}}{2 \cdot ((D_6 \cdot D_7 - D_5 \cdot D_9) \cdot \alpha_i^2 + D_5 \cdot D_{11})}; \quad B_{5i} = -\frac{\alpha_i}{D_7} \cdot (D_5 \cdot B_{2i} + D_6 / 2); \quad (i=1,2) \\
\gamma_{31} &= \frac{(D_6 \cdot D_{12} - D_7 \cdot D_{11})}{(D_{10} \cdot D_{12} - D_{11}^2)} \cdot \frac{q}{2 \cdot D_5}; \\
k_{11} &= \frac{q \cdot D_6}{2 \cdot D_5 \cdot D_{11}} - \frac{D_{10}}{D_{11}} \gamma_{31}; \quad k_{21} = 6 \cdot \frac{D_7}{D_{12}} \cdot \beta_{21} - \frac{D_{11}}{2 \cdot D_{12}} \cdot \gamma_{41}; \\
\alpha_3 &= \sqrt{\frac{D_1 \cdot D_{10} \cdot (D_2^2 - D_1 \cdot D_5)}{(D_1 \cdot D_6 - D_2 \cdot D_3)^2 + (D_1 \cdot D_8 - D_3^2) \cdot (D_2^2 - D_1 \cdot D_5)}}; \\
B_{13} &= -\frac{\alpha_3}{D_1} \cdot \left(2 \cdot D_2 \cdot \frac{D_1 \cdot D_6 - D_2 \cdot D_3}{2 \cdot (D_2^2 - D_1 \cdot D_5)} + D_3 \right); \quad B_{23} = \frac{D_1 \cdot D_6 - D_2 \cdot D_3}{2 \cdot (D_2^2 - D_1 \cdot D_5)}; \\
m_{13} &= \frac{q}{48 \cdot (D_5 - D_2^2 / D_1)}; \quad k_{13} = -\frac{D_2}{D_1} \cdot \frac{q}{6 \cdot (D_5 - D_2^2 / D_1)}; \\
n_{33} &= \frac{4}{D_{10}} \cdot \frac{q \cdot (D_6 \cdot D_1 - D_2 \cdot D_3)}{D_5 \cdot D_1 - D_2^2}; \quad k_{23} = -\frac{6 \cdot D_2}{D_1} \cdot m_{23}.
\end{aligned}$$

Невідомі сталі (кількість їх 20), визначаємо чисельно із системи граничних умов, отриманої з варіаційного рівняння (7):

у перерізі на опори ($x = -a$):

$$\begin{cases} w_1 = 0; & w_{1,xx} = 0; \\ \chi_1 - \chi_2 = 0; & (\chi_1 - \chi_2)_{,xx} = 0; \\ \gamma_{01,xx} = 0; \end{cases} \quad (14)$$

у перерізі спряження ($x = 0$):

$$\begin{cases} u_{03} - u_{04} = 0; & w_1 = w_3; & w_{1,xx} = w_{3,xx}; & \chi_1 - \chi_2 = \chi_3 - \chi_4; \\ (\chi_1 - \chi_2)_{,xx} = (\chi_3 - \chi_4)_{,xx}; & \gamma_{01} = 0; \\ 2 \cdot D_5 \cdot w_{1,xxx} + D_6 \cdot (\chi_1 - \chi_2)_{,xxx} + 2 \cdot D_7 \cdot \gamma_{01,xxx} - \\ - D_2 \cdot (u_{03} - u_{04})_{,xx} - 2 \cdot D_5 \cdot w_{3,xxx} - D_6 \cdot (\chi_3 - \chi_4)_{,xxx} = 0; \\ 2 \cdot D_5 \cdot w_{1,xx} + D_6 \cdot (\chi_1 - \chi_2)_{,xx} + 2 \cdot D_7 \cdot \gamma_{01,xx} - \\ - D_2 \cdot (u_{03} - u_{04})_{,x} - 2 \cdot D_5 \cdot w_{3,xx} - D_6 \cdot (\chi_3 - \chi_4)_{,xx} = 0; \\ 2 \cdot D_6 \cdot w_{1,xxx} + D_8 \cdot (\chi_1 - \chi_2)_{,xxx} + 2 \cdot D_9 \cdot \gamma_{01,xxx} - \\ - D_3 \cdot (u_{03} - u_{04})_{,xx} - 2 \cdot D_6 \cdot w_{3,xxx} - D_8 \cdot (\chi_3 - \chi_4)_{,xxx} = 0; \\ 2 \cdot D_6 \cdot w_{1,xx} + D_8 \cdot (\chi_1 - \chi_2)_{,xx} + 2 \cdot D_9 \cdot \gamma_{01,xx} - \\ - D_3 \cdot (u_{03} - u_{04})_{,x} - 2 \cdot D_6 \cdot w_{3,xx} - D_8 \cdot (\chi_3 - \chi_4)_{,xx} = 0; \end{cases} \quad (15)$$

у перерізі посередині балки ($x = b$):

$$\begin{cases} u_{03} - u_{04} = 0; & w_{3,xx} = 0; & (\chi_3 - \chi_4)_{,xx} = 0; \\ -D_2 \cdot (u_{03} - u_{04})_{,xx} - 2 \cdot D_5 \cdot w_{3,xxx} - D_6 \cdot (\chi_3 - \chi_4)_{,xxx} = 0; \\ -D_3 \cdot (u_{03} - u_{04})_{,xx} - 2 \cdot D_6 \cdot w_{3,xxx} - D_8 \cdot (\chi_3 - \chi_4)_{,xxx} = 0; \end{cases} \quad (16)$$

Порівняння показників числових розрахунків з результатами розрахунків за методом скінченних елементів (МСЕ) [4] дано в таблиці для балок з характеристиками пружності: $E=11000\text{МПа}$ і $G'=500\text{МПа}$. У [5] отримано МСЕ

як розв'язок задачі плоского напружено-деформованого стану із застосуванням в області на краю тріщини спеціальних сингулярних трикутної форми скінченних елементів. Залежно від відносної довжини балки і тріщини відносна різниця в максимальних дотичних напругах τ_x^{max} на опорі коливається в межах 0,7–8%, у відношеннях максимальних прогинів до відповідних прогинів у суцільній балці w^{max}/w_0 — до 3,8%, у максимальних нормальних напругах σ_x^{max} — до 4,1%. При цьому різниця в дотичних напругах зростає із збільшенням відносної довжини тріщини l/L , а в максимальних прогинах і нормальних напругах — при зменшенні l/L . У нормальних напругах σ_x поблизу краю тріщини спостерігається відхилення від фізично обґрунтованого характеру. У дещо віддалених від краю тріщини перерізах (на відстань $> h$) вплив цих особливостей на НДС зникає.

Таблиця

Порівняння результатів розрахунку максимальних дотичних напруг, прогинів і нормальних напруг з результатами за МСЕ [4]

Довжина тріщини m , мм	Прогини		Напруги				Δ , %
	w^{max}/w_0		τ_x^{max} , МПа		σ_x^{max} , МПа		
	За (13)	МСЕ [4]	За (13)	МСЕ [4]	За (13)	МСЕ [4]	
600	1,0000	1,00013	0,9566	0,9975	10,127	10,236	-1,1
1800	1,0002	1,00763	0,9563		10,401	10,534	-1,3
3000	1,0242	1,04661	0,9536		10,947	11,146	-1,8
4800	1,1940	1,23905	0,9169		12,267	12,576	-2,5

Висновки. Для НДС балки із симетричною поздовжньою тріщиною отримано аналітично-числовий результат, який задовольняє умови спряження в поперечному перерізі на краю тріщини інтегрально для нормальних напруг і точно — для переміщень і дотичних напруг. Уведенням в гіпотези другої функції зсуву $\gamma_0 = 0$ досягається відсутність розривів у зміщеннях і дотичних напругах між областями в усіх точках поперечного перерізу на краю тріщини, проте залишаються розриви в нормальних напругах, для яких граничні умови можна задовольнити лише інтегрально. Отриманий результат добре відображає НДС балки, за винятком області біля краю тріщини, а також добре узгоджується з відомими числовими розв'язками й експериментальними даними. У подальшому авторами ставиться задача отримання уточненого аналітичного розв'язку з точним виконанням умов спряження (кінематичних і статичних) у перерізі на краю тріщини.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Гуртовий О. Г. Дослідження деформації балки з обмеженою поздовжньою тріщиною / О. Г. Гуртовий, Т. Мейта, Т. Мацелик // Матеріали студ. наук. конф. НУВГП. — Рівне : НУВГП, 2010. — 2 с.
2. Гуртовий О. Г. Згин ізотропної балки з обмеженою поздовжньою тріщиною / О. Г. Гуртовий, Д. В. Жук // Вісн. НУВГП: зб. наук. пр. — Вип. № 2 (58). Сер. «Технічні науки». — Рівне: НУВГП, 2012. — 8 с.

3. Шваб'юк В. І. Циліндричний згин трансропної плити, послабленої тунельною тріщиною / В. І. Шваб'юк, Я. М. Пастернак, О. В. Гуда // Вісн. Дніпропетр. ун-ту. — Д., 2011. — Т. 19. — № 5. — С. 245–254.
4. Чернолоз В. С. Несуча здатність дерев'яних балок з пошкодженнями у вигляді наскрізних тріщин : моногр. / В. С. Чернолоз, А. М. Іванюк. — Рівне : НУВГП, 2013. — 149 с.
5. Гуртовий О. Г. Проблеми застосування уточнених моделей для НДС балки з обмеженим міжшаровим дефектом / О. Г. Гуртовий, Д. В. Жук, О. А. Лепуга // Матеріали студ. наук. конф. НУВГП. — Рівне : НУВГП, 2009. — 2 с.
6. Марчук М. В. Змішана схема методу скінченних елементів для розрахунку шаруватих композитних оболонок і пластин / М. В. Марчук, М. М. Хом'як. — Львів: ПММ ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2003. — 216 с.

REFERENCES

1. Gurtovyi O. G., Mejta T., Matselyk T. (2010), The investigation of the beam deformation with a limited longitudinal crack, Proceedings of the students scientific conference of NUWMNRU, Rivne, NUWMNRU Press, 2010, 2 p.
2. Gurtovyi O. G., Zhuk D. V. (2012), The beam isotropic curve with a limited longitudinal crack, Technical Sciences, The NUWMNRU Herald, No. 2(58), 8 p.
3. Shvabyuk V. I., Pasternak Ya. M., Guda O. V. (2011), The cylindrical curve of a transtrophe plate, weakened by a tunnel crack, The Herald of Dnipropetrovs'k University, Vol. 19 No. 5, pp. 245–254.
4. Chornoloz V. S., Ivanyuk A. M. (2013), Incapability of wooden beams' with damages in the shape of through cracks, NUWMNRU Press, Rivne.
5. Gurtovyi O. G., Zhuk D. V., Lepuha O. A. (2009), Problems of the refined models usage for a NDS beam with a limited interlayer defect, Proceedings of students' scientific conference of NUWMNRU, 2009, Rivne, 2 p.
6. Marchuk M. V., Khomyak M. M. (2003), The mixed scheme of the finished elements method for the layer composite cover plate calculation, The NAS Ya.S. Pidstry'gach IPMM Press.

PECULIARITIES OF REFINED SOLUTION OF A BEAM STRESS STATE WITH A LONGITUDINAL CRACK

O. H. Hurtovyi¹, D. V. Zhuk¹, L. S. Uhryn²

¹National University of Water Management and Nature Resources Use,
11, Soborna St., Rivne, 33028, Ukraine

²Ukrainian Academy of Printing,
19, Pidholosko St., Lviv, 79020, Ukraine
o_g_gurtovyi@ukr.net

The problem of bending of a transversely-isotropic beam with limited longitudinal crack has been solved using the variational method of Lagrange due to the refined model. The results have been compared with the experimental data. The analysis of the influence of crack on the stress-strain state of the beam and influence of the applied kinematic model for accuracy of conjugation conditions in the section on the edge of the crack has been done.

Keywords: beam, bending, longitudinal crack.

Стаття надійшла до редакції 18.12.2014.

Received 18.12.2014.