УДК 512.546

ЕКВІВАЛЕНТНІСТЬ ЗА МАРКОВИМ НАБОРІВ ТИХОНОВСЬКИХ ПРОСТОРІВ ТА ІЗОМОРФІЗМИ ГРУП НЕПЕРЕРВНИХ ВІДОБРАЖЕНЬ

Н. М. Пирч

Українська академія друкарства,
вул. Під Голоском, 19, Львів, 79020, Україна

У статті вивчаються ізоморфізми $i: F(X) \rightarrow F(Y)$ вільних топологічних груп та вільних абелевих топологічних груп, що задовольняють певні додаткові властивості, зокрема переводять підгрупи $\langle X_s \rangle$, породжені системою підпросторів $\{X_s\}_{s \in S^*}$ в X у підгрупи $\langle Y_s \rangle$, породжені системою підпросторів $\{Y_s\}_{s \in S^*}$ у Y . Встановлено, що кожному такому ізоморфізму відповідає ізоморфізм $h: C_p(X; G) \rightarrow C_p(Y; G)$ топологічних груп неперервних відображень у топологічну групу, які задовольняють певні властивості. Проблема ізоморфної класифікації вільних топологічних груп над наборами тихоновських просторів є набагато складнішою, ніж проблема цієї ж класифікації над просторами. Її розв'язання потребує, з одного боку, методів побудови спеціальних ізоморфізмів між вільними групами, а з іншого боку, відносних топологічних властивостей, що є інваріантами відношення M -еквівалентності. Ми даємо означення ряду підмножин $G(X_s)$ у $C_p(X; G)$, встановлюємо, що ці підмножини є підгрупами в $C_p(X; G)$, і доводимо, що образами цих підгруп при відображенні h є аналогічні підгрупи $G(Y_s)$ в $C_p(Y; G)$. Використання ізоморфізмів між $C_p(X; G)$ та $C_p(Y; G)$ із заданими властивостями дає можливість встановити широкий клас властивостей наборів тихоновських просторів, що зберігаються відношенням M -еквівалентності та A -еквівалентності.

Ключові слова: вільна топологічна група, M -еквівалентність, набір тихоновських просторів, простір неперервних відображень, топологія поточної збіжності.

Постановка проблеми. У статті [3] було введено поняття еквівалентних наборів тихоновських просторів для різних функторів топологічної алгебри. Для того щоб встановити, чи є два набори еквівалентними, потрібно у випадку позитивної відповіді побудувати відповідний топологічний ізоморфізм або у випадку негативної відповіді подати певну необхідну умову для еквівалентності наборів, яка для таких двох наборів не виконується. У цій роботі ми встановлюємо цілий ряд таких необхідних умов.

Аналіз останніх досліджень та публікацій. У статті [2] було запропоновано означення еквівалентних пар тихоновських просторів, яке в праці [3] було узагальнено до поняття еквівалентних наборів тихоновських просторів. У праці [4] вивчався зв'язок між ізоморфізмами вільних топологічних груп та ізоморфізмами груп неперервних відображень у топології поточної збіжності.

Мета статті. У цій статті ми продовжуємо вивчення еквівалентних за Марковим наборів тихоновських просторів, розпочаті в попередніх статтях. Тому основна мета — встановлення того факту, що кожному ізоморфізму між вільними топологічними групами, який має певні властивості, відповідає ізоморфізм $h: C_p(X; G) \rightarrow C_p(Y; G)$, що задовольняє відповідні властивості.

Термінологія і позначення взяті зі статей [3] та [5]. У праці досліджується застосування M -еквівалентних наборів у побудові ізоморфізмів топологічних груп неперервних функцій, які мають широкий клас інваріантних підгруп.

Для топологічного простору X та топологічної групи G позначимо через $C(X; G)$ групу всіх неперервних відображень із X у G з операцією $f \cdot g(x) = f(x) \cdot g(x)$. Групу $C(X; G)$, наділену топологією поточної збіжності, будемо позначати $C_p(X; G)$. Для тихоновського простору X та його підпростору Y позначимо через $\langle Y \rangle$ підгрупу у вільній топологічній групі $F(X)$, породжену множиною твірних Y .

Означення 1. Нехай $\{X_s\}_{s \in S}$ — сім'я підпросторів топологічного простору X , $\{Y_s\}_{s \in S}$ — сім'я підпросторів топологічного простору Y . Скажемо, що сім'я $(X, \{X_s\}_{s \in S})$ є M -еквівалентною сім'ї $(Y, \{Y_s\}_{s \in S})$, якщо існує топологічний ізоморфізм $i: F(X) \rightarrow F(Y)$, такий, що $i(\langle X_s \rangle) = \langle Y_s \rangle$ для всіх $s \in S$. Будемо позначати це у такий спосіб $(X, \{X_s\}_{s \in S}) \sim^M (Y, \{Y_s\}_{s \in S})$.

Твердження 1. Нехай G — топологічна група, $\{G_s\}_{s \in S}$ — сім'я підгруп у G , $\{X_s\}_{s \in S}$ — сім'я підпросторів топологічного простору X . Тоді підмножина

$$M_1 = \{f \in C(X, G) : \forall s \in S \ f(X_s) \subseteq G_s\}$$

є підгрупою в $C(X; G)$.

Доведення. Нехай $f_1, f_2 \in C(X, G)$, $f_1(X_s) \subseteq G_s$, $f_2(X_s) \subseteq G_s$. Якщо $x \in X_s$, то $f_1 \cdot f_2(x) = f_1(x) \cdot f_2(x) \in G_s$, $f_1^{-1}(x) = (f_1(x))^{-1} \in G_s$. $\diamond$

Твердження 2. Нехай G — топологічна група, $\{\tau_s\}_{s \in S}$ — сім'я нескінченних кардиналів, $\{X_s\}_{s \in S}$ — сім'я підпросторів топологічного простору X . Тоді підмножина

$$M_2 = \{f \in C(X; G) : \forall s \in S \ nw(f(X_s)) \leq \tau_s\}$$

є підгрупою в $C(X; G)$.

Доведення. Нехай $f_1, f_2 \in C(X, G)$, $nw(f_1(X_s)) \leq \tau_s$, $nw(f_2(X_s)) \leq \tau_s$. Тоді $nw(f_1(X_s) \cdot f_2(X_s)) \leq \tau_s$ [5], $nw(f_1^{-1}(X_s)) = nw(f_1(X_s)^{-1}) = nw(f_1(X_s)) \leq \tau_s$. $\diamond$

Твердження 3. Нехай G — топологічна група, $\{\tau_s\}_{s \in S}$ — сім'я нескінченних кардиналів, $\{X_s\}_{s \in S}$ — сім'я підпросторів топологічного простору X . Тоді підмножина

$$M_3 = \{f \in C(X, G) : \forall s \in S \ |f(X_s)| \leq \tau_s \quad |f_1(X_s)| \leq \tau_s,$$

є підгрупою в $C(X; G)$.

Доведення. Нехай $f_1, f_2 \in C(X, G)$, $|f_1(X_s)| \leq \tau_s$, $|f_2(X_s)| \leq \tau_s$. Тоді

$$|f_1(X_s) \cdot f_2(X_s)| \leq |f_1(X_s)| \times |f_2(X_s)| \leq \tau_s \times \tau_s = \tau_s,$$

$$|f_1^{-1}(X_s)| = |(f_1(X_s))^{-1}| = |f_1(X_s)| \leq \tau_s. \diamond$$

Теорема 1. Нехай G — топологічна група; $\{G_s\}_{s \in S}$ — сім'я підгруп в G ; $\{\tau_s\}_{s \in S}$ — сім'я нескінченних кардиналів; $\{X_s\}_{s \in S}$ — сім'я підпросторів топологічного простору X . $\{Y_s\}_{s \in S}$ — сім'я підпросторів топологічного простору Y .

Якщо $(X, \{X_s\}_{s \in S}) \sim^M (Y, \{Y_s\}_{s \in S})$, то існує топологічний ізоморфізм $h: C_p(X, G) \rightarrow C_p(Y, G)$, такий, що:

1. $h(\{f \in C(X, G) : \forall s \in S \ f(X_s) \subseteq G_s\}) = \{g \in C(Y, G) : \forall s \in S \ g(Y_s) \subseteq G_s\}$;
2. $h(\{f \in C(X, G) : \forall s \in S \ nw(f(X_s)) \leq \tau_s\}) = \{g \in C(Y, G) : \forall s \in S \ nw(g(Y_s)) \leq \tau_s\}$;
3. $h(\{f \in C(X, G) : \forall s \in S \ |f(X_s)| \leq \tau_s\}) = \{g \in C(Y, G) : \forall s \in S \ |g(Y_s)| \leq \tau_s\}$.

Доведення. Нехай $i: F(X) \rightarrow F(Y)$ — топологічний ізоморфізм, такий, що $i(\langle X_s \rangle) = \langle Y_s \rangle$ для всіх $s \in S$. Нехай $f: X \rightarrow G$ — неперервне відображення, $f^*: F(X) \rightarrow G$ — його гомоморфне продовження. Покладемо $h(f) = f^* \circ i^{-1}|_Y$. Відображення $h: C_p(X, G) \rightarrow C_p(Y, G)$ є топологічним ізоморфізмом [4].

Нехай $f_1 \in \{f \in C(X, G) : f(X_s) \subseteq G_s\}$, тоді $f_1(\langle X_s \rangle) \subseteq G_s$. Оскільки $i^{-1}(\langle Y_s \rangle) = \langle X_s \rangle$, то $f^* \circ i^{-1}(\langle Y_s \rangle) \subseteq G_s$, звідки $h(f_1(\langle Y_s \rangle)) \subseteq G_s$. Отже, $h(f_1(Y_s)) \subseteq G_s$, тобто $h(f_1) \in \{g \in C(Y, G) : \forall s \in S \ g(Y_s) \subseteq G_s\}$.

Нехай $f_1 \in \{f \in C(X, G) : \forall s \in S \ nw(f(X_s)) \leq \tau_s\}$. Тоді $nw(f_1(\langle X_s \rangle)) \leq \tau_s$. Оскільки $i^{-1}(\langle Y_s \rangle) = \langle X_s \rangle$, то $nw(f^* \circ i^{-1}(\langle Y_s \rangle)) \leq \tau_s$, звідки $nw(h(f_1(\langle Y_s \rangle))) \leq \tau_s$. Отже, $nw(h(f_1(Y_s))) \leq \tau_s$, тобто $h(f_1) \in \{g \in C(Y, G) : \forall s \in S \ nw(g(Y_s)) \leq \tau_s\}$.

Нехай $f_1 \in \{f \in C(X, G) : \forall s \in S \ |f(X_s)| \leq \tau_s\}$, тоді $|f_1(\langle X_s \rangle)| \leq \tau_s$. Оскільки $i^{-1}(\langle Y_s \rangle) = \langle X_s \rangle$, то $|f^* \circ i^{-1}(\langle Y_s \rangle)| \leq \tau_s$, звідки $|h(f_1(\langle Y_s \rangle))| \leq \tau_s$.

Отже, $|h(f_1(Y_s))| \leq \tau_s$. Тобто $h(f_1) \in \{g \in C(Y, G) : \forall s \in S \ |g(Y_s)| \leq \tau_s\}$. $\diamond$

Нехай A — підпростір топологічного простору X ; G — топологічна група. Через $CE(A, X, G)$ позначимо множину неперервних відображень із топологічного простору A у топологічну групу A , які допускають неперервне продовження на X . На множині $CE(A, X, G)$ (CE — continuous extendible) вводиться групова операція за формулою $f_1 \cdot f_2(x) = f_1(x) \cdot f_2(x)$.

Якщо G — адитивна група дійсних чисел із топологією поточної збіжності, то будемо писати скорочено $CE(A, X)$. Множина $CE(A, X)$ є лінійними простором.

Твердження 4. Нехай A — підпростір топологічного простору X ; G — топологічна група. Тоді $CE(A, X, G)$ підгрупа в $C(A, G)$.

Доведення. Нехай $f_1, f_2 \in CE(A, X, G)$. Якщо F_1 та F_2 — неперервні продовження відображень f_1 і f_2 , то $F_1 \cdot F_2$ — неперервне продовження відображення $f_1 \cdot f_2$, тобто $f_1 \cdot f_2 \in CE(A, X, G)$. Якщо F_1 — неперервне продовження відображення f_1 , то F_1^{-1} — неперервне продовження відображення f_1^{-1} , тобто $f_1^{-1} \in CE(A, X, G)$. $\diamond$

Наслідок 1. Нехай $(X, A) \sim^M (Y, B)$, підпростір A є P -вкладеним у простір X , підпростір B є P -вкладеним у простір Y . Тоді групи $CE(A, X, G)$ і $CE(B, Y, G)$ є ізоморфними. Зокрема, простори $CE(A, X)$ і $CE(B, Y)$ є лінійно гомеоморфними.

Доведення. Нехай $f: A \rightarrow G$ — неперервне відображення з топологічного простору A у топологічну групу G , $i: F(X) \rightarrow F(Y)$ — топологічний ізоморфізм, такий, що $i(\langle X_s \rangle) = \langle Y_s \rangle$. Нехай $f_1: \langle A \rangle \rightarrow G$ — гомоморфне продовження відображення f . Покладемо $l(f) = i(f_1)|_B$. За побудовою відображення l є гомоморфізмом.

Покажемо, що $l(f) \in CE(B, Y, G)$. Оскільки $f \in CE(A, X, G)$, то існує неперервне відображення $F: X \rightarrow G$, таке, що $F|_A = f$. Оскільки $l(f_1) = F \circ i|_B$, то відображення $l(f_1)$ є неперервним і допускає неперервне продовження $F \circ i|_Y$ на простір Y . $\diamond$

Твердження 5. Нехай G — топологічна група, G_1 — підгрупа в G ; X_1 — підпростір топологічного простору X . Тоді підмножина $\{f \in CE(X_1, X, G): f(X_1) \subseteq G_1\}$ є підгрупою в $CE(X_1, X, G)$.

Доведення. Підмножина $\{f \in CE(X_1, X, G): f(X_1) \subseteq G_1\}$ є перетином підгруп $CE(X_1, X, G)$ і $\{f \in C(X_1, G): f(X_1) \subseteq G_1\}$, а отже, і сама є підгрупою. $\diamond$

Твердження 6. Нехай G — топологічна група, τ_1, τ_2 — нескінченні кардинали, X_1 — підпростір топологічного простору X . Тоді підмножина

$$M_4 = \{f \in CE(X_1, X, G): nw(f(X_1)) \leq \tau_1 \wedge \exists F \in C(X, G) \ nw(F(X)) \leq \tau_2, F|_{X_1} = f\}$$

є підгрупою в $CE(X_1, X, G)$.

Доведення. Нехай $f_1, f_2 \in CE(X_1, X, G)$. Якщо F_1 та F_2 — неперервні продовження відображень f_1 і f_2 , то $F_1 \cdot F_2$ — неперервне продовження відображення $f_1 \cdot f_2$.

$nw(f_1 \cdot f_2(X)) = nw(f_1(X) \cdot f_2(X)) \leq \tau_1$, $nw(F_1 \cdot F_2(X)) = nw(F_1(X) \cdot f_2(X)) \leq \tau_2$ тобто $f_1, f_2 \in M_4$.

Якщо F_1 — неперервне продовження відображення f_1 , то F_1^{-1} — неперервне продовження відображення F_1^{-1} . Тоді $nw(f_1^{-1}(X)) = nw(f_1(X)^{-1}) = nw(f_1(X)) \leq \tau_1$, $nw(F_1^{-1}(X)) = nw(F_1(X)^{-1}) = nw(F_1(X)) \leq \tau_2$, тобто $f_1^{-1} \in M_4$. $\diamond$

Твердження 7. Нехай G — топологічна група, τ_1, τ_2 — нескінченні кардинали, X_1 — підпростір топологічного простору X . Тоді підмножина

$$M_5 = \{f \in CE(X_1, X, G): |f(X_1)| \leq \tau_1 \wedge \exists F \in C(X, G) \ |F(X)| \leq \tau_2, F|_{X_1} = f\}$$

є підгрупою в $CE(X_1, X, G)$.

Доведення. Нехай $f_1, f_2 \in CE(X_1, X, G)$. Якщо F_1 та F_2 — неперервні продовження відображень f_1 і f_2 , то $F_1 \cdot F_2$ — неперервне продовження відображення $f_1 \cdot f_2$.

$|f_1 \cdot f_2(X)| = |f_1(X) \cdot f_2(X)| \leq \tau_1$, $|F_1 \cdot F_2(X)| = |F_1(X) \cdot f_2(X)| \leq \tau_2$, тобто $f_1, f_2 \in M_5$.

Якщо F_1 — неперервне продовження відображення f_1 , то F_1^{-1} — неперервне продовження відображення f_1^{-1} ,

$|f_1^{-1}(X)| = |f_1(X)^{-1}| = |f_1(X)| \leq \tau_1$, $|F_1^{-1}(X)| = |F_1(X)^{-1}| = |F_1(X)| \leq \tau_2$, тобто $f_1^{-1} \in M_5$. $\diamond$

Теорема 2. Нехай G — топологічна група; τ_1, τ_2 — нескінченні кардинали, X_1 — P -вкладений підпростір топологічного простору X ; Y_1 — P -вкладений підпростір топологічного простору Y . Якщо $(X, X_1) \sim^M (Y, Y_1)$, то існує топологічний ізоморфізм $h: CE_p(X_1, X, G) \rightarrow CE_p(Y_1, Y, G)$, такий, що:

- $h(\{f \in CE(X_1, X, G): f(X_1) \subseteq G_1\}) = \{g \in CE(Y_1, Y, G): f(Y_1) \subseteq G_1\}$;
- $h(\{f \in CE(X_1, X, G): nw(f(X_1)) \leq \tau_1 \wedge \exists f_1 \in C(X, G) \ nw(f_1(X)) \leq \tau_2 \ f_1|_{X_1} = f\}) = \{g \in CE(X_1, X, G): nw(g(X_1)) \leq \tau_1 \wedge \exists g_1 \in C(X, G) \ nw(g_1(X)) \leq \tau_2 \ g_1|_{X_1} = f\}$;
- $h(\{f \in CE(X_1, X, G): |f(X_1)| \leq \tau_1 \wedge \exists f_1 \in C(X, G) \ |f_1(X)| \leq \tau_2 \ f_1|_{X_1} = f\}) =$

$$= \{g \in CE(X_1, X, G) : |g(X_1)| \leq \tau_1 \wedge \exists g_1 \in C(X, G) |g_1(X)| \leq \tau_2 \text{ } g_1|_{X_1} = f\}.$$

Доведення. Аналогічне доведенню теореми 1.

Нехай A — підпростір тихоновського простору X , $\{X_s : s \in S\}$ — сім'я підпросторів топологічного простору X ; G — топологічна група. Позначимо $C(A, X : \{X_s : s \in S\}, G)$ множину неперервних відображень g із топологічного простору A у топологічну групу G , що допускають неперервне продовження $f : X \rightarrow G$, таке, що $f|_{X_s} = \text{const}_s$.

Якщо $G=R$, то будемо вживати скорочене позначення $C(A, X : \{X_s : s \in S\})$. Множина $C(A, X : \{X_s : s \in S\})$ є лінійним простором. Наділимо множину $C(A, X : \{X_s : s \in S\})$ топологією поточної збіжності, отриманий простір будемо позначати $C_p(A, X : \{X_s : s \in S\})$.

Лема 1. Нехай $\{X_s\}_{s \in S}$ — сім'я підпросторів топологічного простору X , $A \subseteq X$, G — топологічна група. Тоді $C_p(A, X : \{X_s : s \in S\}, G)$ є підгрупою топологічної групи $C_p(X, G)$.

Лема 2. Якщо існує топологічний ізоморфізм $i : F(X) \rightarrow F(Y)$, такий, що $i(\langle X_s \rangle) = \langle Y_s \rangle$ для всіх $s \in S$, то топологічні групи $C_p(A, X : \{X_s : s \in S\}, G)$ та $C_p(A, Y : \{Y_s : s \in S\}, G)$ є топологічно ізоморфними. Зокрема, лінійні топологічні простори $C_p(A, X : \{X_s : s \in S\})$ та $C_p(A, Y : \{Y_s : s \in S\})$ є лінійно гомеоморфними.

Скажемо, що функція $f : X \rightarrow G$ є обмеженою, якщо $f(X) \subseteq K$ для деякої компактної множини K . Позначимо через $C^*(X, G)$ множину всіх неперервних обмежених функцій із топологічного простору X у топологічну групу G . Множину $C^*(X, G)$, наділену топологією поточної збіжності, будемо позначати $C_p^*(X, G)$ [6].

Твердження 8. Нехай G — топологічна група; X — топологічний простір. Тоді множина $C^*(X, G)$ є підгрупою в $C(X; G)$.

Означення 2. Нехай $\{X_s\}_{s \in S}$ — сім'я підпросторів топологічного простору X , $\{Y_s\}_{s \in S}$ — сім'я підпросторів топологічного простору Y . Сім'я $(X, \{X_s\}_{s \in S})$ сильно M -еквівалентна сім'ї $(Y, \{Y_s\}_{s \in S})$, якщо існує топологічний ізоморфізм $i : F(X) \rightarrow F(Y)$, такий, що $i(\langle X_s \rangle) = \langle Y_s \rangle$ для всіх $s \in S$, а також $i(X) \subseteq F(Y)_n$, $i^{-1}(Y) \subseteq F(X)_m$ для деяких натуральних n та m . Будемо позначати це у такий спосіб: $(X, \{X_s\}_{s \in S}) \overset{M}{\approx} (Y, \{Y_s\}_{s \in S})$.

Твердження 9. Нехай G — топологічна група. Якщо $(X, \{X_s\}_{s \in S}) \overset{M}{\approx} (Y, \{Y_s\}_{s \in S})$, то існує топологічний ізоморфізм $h : C_p(X, G) \rightarrow C_p(Y, G)$, такий, що $h(C_p^*(X, G)) = C_p^*(Y, G)$, і виконуються такі умови:

$$\begin{aligned} h(\{f \in C^*(X, G) : \forall s \in S f(X_s) \subseteq G_s\}) &= \{g \in C^*(Y, G) : \forall s \in S g(Y_s) \subseteq G_s\}; \\ h(\{f \in C^*(X, G) : \forall s \in S \text{nw}(f(X_s)) \leq \tau_s\}) &= \{g \in C^*(Y, G) : \forall s \in S \text{nw}(g(Y_s)) \leq \tau_s\}; \\ h(\{f \in C^*(X, G) : \forall s \in S |f(X_s)| \leq \tau_s\}) &= \{g \in C^*(Y, G) : \forall s \in S |g(Y_s)| \leq \tau_s\}. \end{aligned}$$

Доведення. Нехай $f \in C^*(X, G)$. Тоді $f(X) \subseteq K$ для деякої компактної множини $K \subseteq G$. Тоді $f(F(X)_n) \subseteq (K \cup K^{-1})^n$. Нехай $h : C_p(X, G) \rightarrow C_p(Y, G)$ — топологічний ізоморфізм, побудований у теоремі 1, тоді $h(f(Y)) \subseteq h(F(X)_n)$. Оскільки множина $T = (K \cup K^{-1})^n$ є компактною, то $h(f) \in C^*(Y, G)$. Далі доведення аналогічне доведенню теореми 1.

Твердження 10. Нехай G — топологічна група, $A \subseteq X, \{A_j\}_{j \in J}$ — сім'я підпросторів топологічного простору A , $\{X_s\}_{s \in S}$ — сім'я підпросторів топологічного простору X . Тоді підмножина

$$M_6 = \left\{ f \in CE(A, X, G) : f|_{A_j} = \text{const}_j \exists F \in C(X, G) f|_{X_s} = \text{const}_s F|_A = f \right\}$$

є підгрупою в $CE(A, X, G)$.

Доведення. Нехай $f_1, f_2 \in M_6$. Якщо F_1 та F_2 — неперервні продовження відображень f_1 і f_2 , то $F_1 \cdot F_2$ — неперервне продовження відображення $f_1 \cdot f_2$. $f_1 \cdot f_2|_{A_j} = \text{const}, F_1 \cdot F_2|_{X_s} = \text{const}$, тобто $f_1 \cdot f_2 \in M_6$.

Якщо F_1 — неперервне продовження відображення f_1 , то F_1^{-1} — неперервне продовження відображення f_1^{-1} . Тоді $f_1^{-1}|_{A_j} = \text{const}_j^{-1}, F_1^{-1}|_{X_s} = \text{const}_s^{-1}$, тобто $f_1^{-1} \in M_6$.

Теорема 3. Нехай G — топологічна група, A — P -вкладений підпростір топологічного простору X ; B — P -вкладений підпростір топологічного простору Y . $\{A_j\}_{j \in J}$ — сім'я підпросторів топологічного простору A , $\{B_j\}_{j \in J}$ — сім'я підпросторів топологічного простору B ; $\{X_s\}_{s \in S}$ — сім'я підпросторів топологічного простору X , $\{Y_s\}_{s \in S}$ — сім'я підпросторів топологічного простору Y . Нехай також існує топологічний ізоморфізм $i : F(X) \rightarrow F(Y)$, такий, що $i(\langle A_j \rangle) = \langle B_j \rangle$ та $i(\langle X_s \rangle) = \langle Y_s \rangle$.

Тоді існує спеціальний топологічний ізоморфізм $h : C_p(A, X, G) \rightarrow C_p(B, Y, G)$, такий, що

$$h\left(\left\{ f \in CE(A, X, G) : f|_{A_j} = \text{const}_j \exists F \in C(X, G) f|_{X_s} = \text{const}_s F|_A = f \right\}\right) = \\ = \left\{ g \in CE(A, X, G) : g|_{B_j} = \text{const}_j \exists g_1 \in C(X, G) g_1|_{X_s} = \text{const}_s g_1|_B = g \right\}.$$

Доведення. Аналогічне доведенню теореми 2.

Зауваження 1. Якщо G — абелева топологічна група, то відношення M -еквівалентності у всіх твердженнях статті можна послабити до відношення A -еквівалентності.

Зауваження 2. Якщо в твердженнях цієї статті ізоморфізм $i : F(X) \rightarrow F(Y)$ додатково задовольняє умову, що $i(X) \subseteq F(Y)_n, i^{-1}(Y) \subseteq F(X)_m$ для деяких натуральних n та m , то у відповідних твердженнях словосполучення «неперервна функція» можна замінити на словосполучення «неперервна обмежена функція».

Висновки. Встановлено, що кожному еквівалентному ізоморфізму $i : F(X) \rightarrow F(Y)$ вільних топологічних груп, такому, що $i(\langle X_s \rangle) = \langle Y_s \rangle$, для всіх $s \in S$ відповідає ізоморфізм $h : C_p(X, G) \rightarrow C_p(Y, G)$ груп неперервних відображень у топології поточної збіжності, що переводить ряд підгруп $G(X_s)$, побудованих за множинами $\{X_s\}_{s \in S}$, у відповідні підгрупи $G(Y_s)$ в $C_p(Y, G)$.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Архангельский А. В. Топологические пространства функций. Москва : МГУ, 1989. 222 с.
2. Пирч Н. М. М-еквівалентність пар. Прикладні проблеми математики і механіки. 2004. Вип. 2. С. 74–79.
3. Пирч Н. М. Еквівалентність за Марковим наборів тихоновських просторів 1: загальні властивості. Вісник ЛНУ. Серія математика, механіка. 2017. Т. 84. С. 38–46.

4. Ткачук В. В. Двойственность относительно функтора C_p и кардинальные инварианты типа числа Суслина. Математические заметки. 1985. Т. 37. № 3. С. 441–451.
5. Arhangel'skii A. V., Tkachenko M. G. Topological Groups and Related Structures. Atlantis Press. Amsterdam-Paris, 2008. 781 p.
6. Baars J., de Groot J., van Mill J. and Pelant J. An example of l_p -equivalent spaces which are not l_p^* -equivalent. Proceedings of the American Mathematical Society. 1993. V. 119. № 3. P. 963–969.

REFERENCES

1. Arkhangel'skii, A. V. (1989). Topologicheskie prostranstva funktsii. Moskva: MGU (in Russian).
2. Pyrch, N. M. (2004). M-ekvivalentnist par: Prykladni problemy matematyky i mekhaniky, 2, 74–79 (in Ukrainian).
3. Pyrch, N. M. (2017). Ekvivalentnist za Markovym naboriv tykhonovskyykh prostoriv 1: zahalni vlastyvoli: Visnyk LNU. Seriya matematyka, mekhanika, 84, 38–46 (in Ukrainian).
4. Tkachuk, V. V. (1985). Dvoistvenost otnositelno funkтора Sp i kardinalnye invarianty tipa chisla Suslina: Matematicheskie zametki, 37, 3, 441–451 (in Russian).
5. Arhangel'skii, A. V., & Tkachenko, M. G. (2008). Topological Groups and Related Structures: Atlantis Press. Amsterdam-Paris (in English).
6. Baars, J., de Groot, J., van Mill, J., & Pelant, J. (1993). An example of l_p -equivalent spaces which are not l_p^* -equivalent: Proceedings of the American Mathematical Society, 119, 3, 963–969 (in English).

doi: 10.32403/1998-6912-2019-2-59-72-79

MARKOV EQUIVALENCE OF THE BUNDLES OF TYCHONOFF SPACES AND ISOMORPHISMS OF THE GROUPS OF CONTINUOUS MAPPINGS

N. M. Pyrch

*Ukrainian Academy of Printing,
19, Pid Holoskom, St., Lviv, 79020, Ukraine
pnazar@ukr.net*

In the paper, we consider the equivalence of the bundles of the Tychonoff spaces. For a system $\{X_s\}_{s \in S}$ of topological subspaces of topological space X , system $\{Y_s\}_{s \in S}$ of topological subspaces of topological space Y and a functor F of topological algebra we say that the bundle $(X, \{X_s\}_{s \in S})$ is F -equivalent to the bundle $(Y, \{Y_s\}_{s \in S})$ if there exists topological isomorphism between free topological algebras $F(X)$ and $F(Y)$ mapping subalgebra $\langle X_s \rangle \subseteq F(X)$ generated by subspace X_s to subalgebra $\langle Y_s \rangle \subseteq F(Y)$ generated by subspace Y_s . The problem of the isomorphic classification of the bundles of Tychonoff spaces is more complicated than the isomorphic classification of Tychonoff spaces. To

solve this problem and obtain the classification for some special types of spaces and their subspace, we need general methods for constructing such bundles (sufficient conditions) and some properties of the bundles preserved by this relations. (necessity conditions). Such properties characterizing position of the bundle of spaces in Tychonoff space are called *M*-invariants. Using the results proved in this paper, we can obtain the series of such necessity conditions for the equivalence of the bundles of Tychonoff spaces. For every such isomorphism for every topological group G there exists topological isomorphism $h: C_p(X; G) \rightarrow C_p(Y; G)$ be the groups of continuous mappings into G in the topology of pointwise convergence. We consider the series of subgroups $G(X_s)$ in $C_p(X; G)$ which depend on the subspaces $\{X_s\}_{s \in S}$ and the same subgroups $G(Y_s)$ in such that $h(G(X_s)) = G(Y_s)$. In the paper, we define at first $G(X_s)$ as a subsets in $C_p(X; G)$, then we prove that all defined $G(X_s)$ are subgroups in $C_p(X; G)$ and then we check that $h(G(X_s)) = G(Y_s)$. All the results are obtained for the relation of *M*-equivalence, but if the group G is abelian, these results are valid for *A*-equivalence. If G is a group of real numbers with the topology generated by Euclidian metrics, we can obtain the linear homeomorphism between linear spaces $C_p(X)$ and the results should be concerned with free locally convex spaces and the relation of *L*-equivalence. Under some conditions we can transform for the spaces $C_p^*(X; G)$ of the continuous bounded functions.

Keywords: free topological group, *M*-equivalence, bundle of Tychonoff spaces, the space of continuous mappings, topology of pointwise convergence.

Стаття надійшла до редакції 29.08.2019.

Received 29.08.2019.