**УДК 512.643+519.612**

# ПРО КВАДРАТНІ КОРЕНІ МАТРИЦЬ НАД ДОВІЛЬНИМ ПОЛЕМ

Р. В. Коляда[1], О. М. Мельник[1], В. М. Прокіп[2]

*[1]Українська академія друкарства,*
*вул. Під Голоском, 19, Львів, 79020, Україна*

*[2]ІППММ НАН України ім. Я. С. Підстригача,*
*вул. Наукова, 3б, Львів, 79060, Україна*

*Кажуть, що $n\times n-$ матриця B є квадратним коренем $n\times n-$ матриці A над полем F, якщо $B^2 = A$. Квадратний корінь матриці є основним поняттям під час обчислення полярного розкладу матриці, розв'язування диференціальних рівнянь, побудови фінансової моделі Маркова. Очевидно, що знаходження квадратних коренів із матриці A рівносильне пошуку розв'язків матричного рівняння $X^2 = A$. На відміну від квадратних коренів з комплексних чисел, квадратні корені матриць над полем комплексних чисел можуть не існувати. З іншого боку, ненульова матриця може мати нескінченну кількість квадратних коренів. Аналітично задача про знаходження коренів 2-го степеня із матриці A над полем комплексних чисел C добре вивчена. Проте задача про існування квадратного кореня із матриці над довільним полем досліджена мало.*

*Досліджується задача про існування квадратного кореня із матриці A над довільним полем F. Запропоновано необхідні та достатні умови, за яких для матриці A існує квадратний корінь B над полем F із наперед заданим характеристичним многочленом $b(\lambda)$. Доведено, якщо при заданих умовах матриця B існує, то вона однозначно визначена многочленом $b(\lambda)$ та вказано метод знаходження матриці B. Якщо елементарні дільники матриці A попарно взаємно прості, то задача про існування для неї квадратного кореня із наперед заданим характеристичним многочленом розв'язана повністю.*

*Цей метод дослідження дає змогу вказати класи матриць, для яких число квадратних коренів є скінченним. Зокрема для матриць другого порядку, які не є скалярними, задача розв'язана повністю, тобто вказані умови існування квадратного кореня із матриці.*

***Ключові слова:*** *квадратний корінь матриці, характеристичний многочлен, ранг матриці, лінійне матричне рівняння.*

**Постановка проблеми.** Нехай $F[\lambda]$ — кільце многочленів над довільним полем $F$. Введемо позначення: $F_{n,n}$ і $F_{n,n}[\lambda]$ — кільця $n\times n$ –матриць над полем $F$ та кільцем многочленів $F[\lambda]$ відповідно; $I_n$, $O_n$ — відповідно одинична і нульова матриці порядку $n$; $a(\lambda)=\det A(\lambda)$ — характеристичний многочлен матриці $A(\lambda)\in F_{n,n}[\lambda]$; $d_A(\lambda)$ — найбільший спільний дільник (н.с.д.) мінорів $(n-1)$-го порядку $A(\lambda)$.

Кажуть, що матриця $B \in F_{n,n}$ є квадратним коренем із матриці $A \in F_{n,n}$, якщо $B^2=A$. Очевидно, що знаходження квадратних коренів із матриці $A$ рівносильне пошуку розв'язків матричного рівняння $X^2=A$. Квадратний корінь матриці є основним поняттям під час обчислення полярного розкладу матриці, розв'язування диференціальних рівнянь, побудови фінансової моделі Маркова. Отже, задача про встановлення умов існування квадратного кореня матриці становить інтерес.

На підставі наслідку із узагальненої теореми Безу, що подано у розд. IV [1], матриця $B$ є квадратним коренем із матриці $A$ тоді і тільки тоді, коли для многочленної матриці $A(\lambda) = I_n\lambda^2 - A$ існує зображення у вигляді добутку $A(\lambda) = (I_n\lambda - B)(I_n\lambda + B)$. Отже, знаходження квадратних коренів матриці $A$ рівнозначне пошуку лінійних унітальних дільників $I_n\lambda - B$ із матриці $A(\lambda) = I_n\lambda^2 - A$.

Нехай матриця $B \in F_{n,n}$ із характеристичним многочленом

$$\det(I_n\lambda - B) = b(\lambda) = \lambda^n + b_1\lambda^{n-1} + \ldots + b_{n-1}\lambda + b_n$$

є розв'язком рівняння $X^2=A$. Із рівності $A(\lambda) = (I_n\lambda - B)(I_n\lambda + B)$ отримуємо

$$\det A(\lambda) = b(\lambda)\tilde{b}(\lambda), \tag{1}$$

де $b(\lambda) = \lambda^n - b_1\lambda^{n-1} + b_2\lambda^{n-2} + \ldots + (-1)^k b_k\lambda^{n-k} + \ldots + (-1)^{n-1}b_{n-1}\lambda + (-1)^n b_n$.

У цьому зв'язку пошук квадратних коренів із матриці $A$ розділимо на частини. Спочатку вкажемо розклади $\det A(\lambda)$ у вигляді добутку (1). Потім будемо шукати лівий унітальний дільник $I_n\lambda - B$ із характеристичним многочленом $b(\lambda)$ для матриці $A(\lambda)$. Якщо ж $I_n\lambda - B$ існує, то запропонуємо метод його знаходження.

**Аналіз останніх досліджень та публікацій.** На відміну від квадратних коренів з комплексних чисел C, квадратні корені матриць над полем комплексних чисел можуть не існувати. Наприклад, із матриці $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ не існує квадратного кореня. З іншого боку, нульова матриця має нескінченну кількість квадратних коренів. Якщо матриця $A$ порядку $n$ над полем комплексних чисел C має принаймні $n-1$ ненульових власних значень, то $A$ завжди має квадратний корінь. В іншому випадку існування квадратного кореня залежить від структури елементарних дільників $A$, що відповідають нульовим власним значенням.

Аналітично задача про знаходження коренів 2-го степеня із матриці $A$ над полем комплексних чисел C добре вивчена. Зокрема у розділі VIII монографії [1] детально описана структура коренів із матриці $A$ в термінах кліток Жордано. Крім цього, існують інші методи знаходження квадратних коренів із матриці $A$, тобто знаходження розв'язків матричного рівняння $X^2=A$. Один із них ґрунтується на класичних поняттях власних значень та жорданових ланцюгів [3] матриці $A(\lambda)$. В основу іншого методу [4] покладено поняття значення многочленної матриці на системі коренів характеристичного многочлена $a(\lambda) = \det A(\lambda)$ та поняття супровідної матриці для многочленної матриці $A(\lambda)$. Відзначимо, що форма Жордано, характеристичні корені многочлена $\det A(\lambda)$ (власні значення) та жорданові ланцюги матриці $A(\lambda)$ є добрим теоретичним інструментом з погляду класичної математики. Однак потрібно розуміти, що вони нестійкі щодо малих змін елементів матриці і тому «погані» з позиції обчислювальної математики. Варто зауважити, що питання стійкості спектра матриці — це окрема проблема, яка стосується матричного аналізу.

В останні кілька років постійно зростає зацікавленість у розробці теорії та чисельних методів для квадратних коренів матриці. Існує ряд обчислювальних методів знаходження квадратного кореня матриці [4–21]. Ці методи можна розділити на два класи. Перший клас — це так звані прямі методи, наприклад алгоритм Шура, розроблений у праці [5]. У публікації [7] показано, як теорема Гамільтона-Келі може бути застосована для обчислення квадратних коренів із 2 × 2-матриць.

Другий клас — це ітераційні методи, тобто побудова квадратного кореня матриці, використовуючи матричні ітерації виду $X_{k+1} = f(X_k)$, де $f(x)$ — поліном або функція $f(x)$ від змінної $x$ [6, 8, 9, 12–21]. Добре відомим є ітераційний метод Ньютона для обчислення квадратного кореня із матриці, який був запропонований у публікації [6]. Пізніше деякі спрощені ітераційні методи Ньютона були розроблені у працях [11–14, 18–20]. На жаль, ці методи мають погану числову стійкість. У працях [16, 17] запропоновано два нові алгоритми для обчислення несингулярного квадратного кореня матриці, які мають хорошу числову стійкість. У публікації [21] запропоновано метод побудови квадратного кореня із матриці, використовуючи ітераційний метод Золотарйова. Задача про єдиність кореня із матриці досліджувалась у публікаціях [9, 10], де вказано умови, за яких квадратний корінь із матриці визначений однозначно. Проте задача про існування квадратного кореня із матриці над довільним полем досліджена мало. У цьому напрямі відзначимо праці [22–24].

**Мета статті.** У цій статті встановимо умови, за яких для матриці $A \in F_{n,n}$ (над довільним полем $F$) існує квадратний корінь $B \in F_{n,n}$ із заздалегідь заданим характеристичним многочленом $b(\lambda)$. Якщо ж матриця $B$ існує, то вкажемо метод її знаходження. Опишемо також класи матриць, для яких кількість квадратних коренів є скінченною.

**Виклад основного матеріалу дослідження.** Нагадаємо, що пошук квадратних коренів із матриці $A$ рівнозначний пошуку лінійних унітальних дільників $I_n\lambda - B$ із матриці $A(\lambda) = I_n\lambda^2 - A$. Тому надалі будемо вважати, що визначник матриці $A(\lambda) = I_n\lambda^2 - A \in F_{n,n}[\lambda]$ допускає зображення у вигляді добутку

$$\det A(\lambda) = b(\lambda)\tilde{b}(\lambda), \tag{2}$$

де $b(\lambda) = \lambda^n + b_1\lambda^{n-1} + \ldots + b_{n-1}\lambda + b_n \in F[\lambda]$ — унітальний многочлен степеня $n$.

Спочатку опишемо структуру квадратних коренів із $2 \times 2$-матриці над довільним полем $F$. Легко переконатися, що для матриці $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \in F_{2,2}$ існує квадратний корінь тоді і тільки тоді, коли $a = \alpha^2$ і $b = \beta^2$. Зауважимо, якщо $A = \begin{bmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a^2 \end{bmatrix} \in F_{2,2}$, то для довільного $x \in F$ матриця $B = \begin{bmatrix} a & x \\ 0 & -a \end{bmatrix}$ є квадратним коренем матриці $A$. Надалі припустимо, що матриця $A \in F_{2,2}$ не є скалярною, тобто $A \neq I_2\alpha$.

**Лема 1.** Нехай $A \in F_{2,2}$ не є скалярною матрицею. Якщо для визначника матриці $A(\lambda) = I_2\lambda^2 - A$ існує зображення у вигляді добутку (2), де $b(\lambda) = \lambda^2 + b_1\lambda + b_2 \in F[\lambda]$, то для матриці $A$ існує квадратний корінь $B$ із характеристичним многочленом $b(\lambda) \in F[\lambda]$ тоді і тільки тоді, коли

$$rank\begin{bmatrix} I_2b_1 & I_2b_2 + A \end{bmatrix} = rank\begin{bmatrix} I_2b_1 & I_2b_2 + A \\ I_2b_2 + A & Ab_2 \end{bmatrix}.$$

***Доведення.*** Нехай для $A(\lambda) = I_2\lambda^2 - A$ існує розклад $A(\lambda) = (I_2\lambda - B)(I_2\lambda + B)$, де $B \in F_{2,2}$ — матриця із характеристичним многочленом $b(\lambda) = \lambda^2 + b_1\lambda + b_2 \in F[\lambda]$. Покладемо $D(\lambda) = I_2\lambda + D$ — взаємна матриця для матриці $B(\lambda) = I_2\lambda - B$, тобто $D(\lambda)B(\lambda) = I_2b(\lambda)$. З огляду на теорему 1 із [24] для матриці $X_0 = \begin{bmatrix} D & -B \end{bmatrix} \in F_{2,4}$, виконується рівність

$$X_0\begin{bmatrix} I_2 & 0_2 & -A \\ I_2 & I_2b_1 & I_2b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_2b_1 & I_2b_2 + A & 0_2 \end{bmatrix}.$$

Помноживши обидві частини цієї рівності справа на матрицю $\begin{bmatrix} I_2 & 0_2 & A \\ 0_2 & I_2 & 0_2 \\ 0_2 & 0_2 & I_2 \end{bmatrix}$, отримуємо

$$X_0\begin{bmatrix} I_2 & 0_2 & 0_2 \\ I_2 & I_2b_1 & I_2b_2 + A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_2b_1 & I_2b_2 + A & Ab_2 \end{bmatrix}.$$

Звідси дістаємо, що $rank\begin{bmatrix} I_2b_1 & I_2b_2 + A \end{bmatrix} = rank\begin{bmatrix} I_2b_1 & I_2b_2 + A \\ I_2b_2 + A & Ab_2 \end{bmatrix}$.

Навпаки, нехай $rank\begin{bmatrix} I_2b_1 & I_2b_2 + A \end{bmatrix} = rank\begin{bmatrix} I_2b_1 & I_2b_2 + A \\ I_2b_2 + A & Ab_2 \end{bmatrix}$. Очевидно, що

$$rank\begin{bmatrix} I_2 & 0_2 & 0_2 \\ I_2 & I_2b_1 & I_2b_2 + A \end{bmatrix} = rank\begin{bmatrix} I_2 & 0_2 & 0_2 \\ I_2 & I_2b_1 & I_2b_2 + A \\ I_2b_1 & I_2b_2 + A & Ab_2 \end{bmatrix}.$$

Тепер матриці в лівій та правій частинах останньої рівності, домноживши справа на матрицю $\begin{bmatrix} I_2 & 0_2 & -A \\ 0_2 & I_2 & 0_2 \\ 0_2 & 0_2 & I_2 \end{bmatrix}$, отримуємо

$$rank\begin{bmatrix} I_2 & 0_2 & -A \\ I_2 & I_2b_1 & I_2b_2 \end{bmatrix} = rank\begin{bmatrix} I_2 & 0_2 & -A \\ I_2 & I_2b_1 & I_2b_2 \\ I_2b_1 & I_2b_2 + A & 0_2 \end{bmatrix}. \tag{3}$$

Оскільки $A \in F_{2,2}$ не є діагональною матрицею, то очевидно, що н.с.д. мінорів першого порядку матриці $A(\lambda)$ дорівнює $d_A(\lambda) = 1$. Отже, $\left(b(\lambda), \tilde{b}(\lambda), d_A(\lambda)\right) = 1$. З огляду на теорему 3 із публікації [24] та рівність (3) для матриці $A(\lambda) = I_2\lambda^2 - A$ існує зображення у вигляді добутку $A(\lambda) = (I_n\lambda - B)(I_n\lambda + B)$, де $B \in F_{p,n}$ — матриця з характеристичним многочленом $\det(I_n\lambda - B) = b(\lambda)$. Оскільки $\left(b(\lambda), \tilde{b}(\lambda), d_A(\lambda)\right) = 1$, то матриця $B$ многочленом $b(\lambda)$ визначена однозначно [25, с. 807].

Нехай за умов леми 1 для матриці $A \in F_{2,2}$ існує квадратний корінь. Із рівності (3) отримуємо, що рівняння $X\begin{bmatrix} I_2b_1 & I_2b_2 + A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_2b_2 + A & Ab_2 \end{bmatrix}$ має єдиний розв'язок. Нехай далі матриця $X_0 \in F_{2,2}$ — розв'язок цього рівняння. Тоді матриці $\pm X_0$ є квадратними коренями матриці $A$. Лему доведено.

Надалі об'єктом дослідження будуть квадратні матриці порядку $n \geq 3$ над довільним полем $F$. Нехай визначник матриці $A(\lambda) = \lambda^2 - A \in F_{n,n}[\lambda]$ допускає факторизацію $\det A(\lambda) = b(\lambda)\tilde{b}(\lambda)$, де $b(\lambda) = \lambda^n + b_1\lambda^{n-1} + \ldots + b_{n-1}\lambda + b_n \in F[\lambda]$. Матриці $A(\lambda)$ та многочлену $b(\lambda)$ поставимо у відповідність матриці

$$M = \begin{bmatrix} I_n & O_n & -A & O_n & \ldots & \ldots & O_n \\ O_n & I_n & O_n & -A & O_n & \ldots & O_n \\ \ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots \\ O_n & \ldots & \ldots & O_n & I_n & O_n & -A \\ I_n & I_n b_1 & I_n b_2 & \ldots & I_n b_{n-2} & I_n b_{n-1} & I_n b_n \end{bmatrix} \in F_{n^2, n(n+1)},$$

$$N = \begin{bmatrix} I_n b_1 & I_n b_2 + A & \ldots & I_n b_{n-2} & I_n b_{n-1} & I_n b_n & O_n \end{bmatrix} \in F_{n,(n+1)n}.$$

**Теорема 1.** Нехай визначник матриці $A(\lambda) = I_n\lambda^2 - A \in F_{n,n}[\lambda]$ допускає зображення у вигляді добутку $\det A(\lambda) = b(\lambda)\tilde{b}(\lambda)$, де $b(\lambda) \in F[\lambda]$ — унітальний многочлен степеня *n*. Якщо $\left(b(\lambda), \tilde{b}(\lambda), d_A(\lambda)\right) = 1$, то для $A$ існує квадратний корінь $B$ із характеристичним многочленом $b(\lambda) \in F[\lambda]$ тоді і тільки тоді, коли $rank\, M = rank \begin{bmatrix} M \\ N \end{bmatrix}$. Якщо матриця $B$ існує, то вона однозначно визначена характеристичним многочленом $b(\lambda)$.

***Доведення.*** Нехай визначник матриці $A(\lambda) = I_n\lambda^2 - A \in F_{n,n}[\lambda]$ зображений у вигляді добутку (2), де $b(\lambda) \in F[\lambda]$ — унітальний многочлен степеня *n*. Нехай далі $\left(b(\lambda), \tilde{b}(\lambda), d_A(\lambda)\right) = 1$. Згідно з теоремою 1 зі статті [24] для матриці $A(\lambda)$ існує зображення у вигляді добутку $A(\lambda) = (I_n\lambda - B)(I_n\lambda + B)$, де $B \in F_{n,n}$ з характеристичним многочленом $\det(I_n\lambda - B) = b(\lambda)$ тоді і тільки тоді, коли $rank\, M = rank \begin{bmatrix} M \\ N \end{bmatrix}$. Отже, матричне рівняння $X M = N$ розв'язне. З огляду на статтю [25], матриця $B$ однозначно визначена характеристичним многочленом $b(\lambda)$.

Нехай матриця $X_0 = \begin{bmatrix} D_1 & \ldots & D_{n-1} & D_n \end{bmatrix}$, де $D_j \in F_{n,n}$ для всіх $j = 1, 2, \ldots, n$ — розв'язок рівняння $X M = N$. На підставі праці [24] отримуємо, що для матриці $D(\lambda) = I_n\lambda^{n-1} + D_1\lambda^{n-2} + \ldots + D_{n-1}$ виконується $I_n b(\lambda) = (I_n\lambda - B)D(\lambda)$. При цьому матриця $B$ є квадратним коренем з характеристичним многочленом $b(\lambda)$ матриці $A$. До того ж матриця $B$ заданим многочленом визначена однозначно.

З іншого боку, отримуємо $D(\lambda)A(\lambda) = b(\lambda)(I_n\lambda - D_n)$. Звідси випливає, що матриця $B = -D_n$. Отже, за розв'язком рівняння $X M = N$ ми побудували квадратний корінь з характеристичним многочленом $b(\lambda)$ для матриці $A$. Теорему доведено.

Із теореми 1 отримуємо такі твердження.

**Наслідок 1.** Нехай для матриці $A(\lambda) = I_n\lambda^2 - A \in F_{n,n}[\lambda]$ н.с.д. мінорів $(n-1)$-го порядку $d_A(\lambda) = 1$. Якщо $\det A(\lambda) = b(\lambda)\tilde{b}(\lambda)$, де $b(\lambda) \in F[\lambda]$ — унітальний многочлен степеня *n*, то для матриці $A$ існує квадратний корінь $B$ із характеристичним многочленом $b(\lambda)$ тоді і тільки тоді, коли $rank\, M = rank \begin{bmatrix} M \\ N \end{bmatrix}$. Якщо матриця $B$ існує, то вона однозначно визначена характеристичним многочленом $b(\lambda)$.

**Наслідок 2.** Нехай визначник матриці $A(\lambda) = I_n\lambda^2 - A \in F_{n,n}[\lambda]$ допускає зображення у вигляді добутку $\det A(\lambda) = b(\lambda)\tilde{b}(\lambda)$, де $b(\lambda) \in F[\lambda]$ — унітальний многочлен степеня *n*. Якщо $(b(\lambda), \tilde{b}(\lambda)) = 1$, то для матриці A існує квадратний корінь *B* із характеристичним многочленом $b(\lambda)$ тоді і тільки тоді, коли $rank\, M = rank \begin{bmatrix} M \\ N \end{bmatrix}$. Якщо матриця *B* існує, то вона однозначно визначена многочленом $b(\lambda)$.

Теорема 1 та наслідки із неї описують значно ширші класи матриць, для яких квадратний корінь визначений однозначно, ніж ті, що описані у публікаціях [9, 10]. Очевидно, що за умов теореми 1 та наслідків із неї шукані квадратні корені існують та їхня кількість є скінченною.

**Висновки.** Для матриць другого порядку над довільним полем задача про знаходження квадратного кореня розв'язана повністю. Для матриць вимірності $n \geq 3$ за певних умов встановлені необхідні та достатні умови існування квадратного кореня із заздалегідь наданим характеристичним многочленом. Якщо шуканий корінь існує, то вказано метод його знаходження. Отримані результати можуть бути використані під час розв'язування матричного диференціального рівняння $\frac{d^2 y(t)}{dt^2} = Ay(t)$.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. 5-е изд. Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2004. 560 с.
2. Gohberg I., Lancaster P., Rodman L. Matrix polynomials. New York : Academic Press, 1982. 409 p.
3. Казімірський П. С. Розклад матричних многочленів на множники. Київ : Наукова думка, 1981. 224 с.
4. Hoskins W. D., Walton D. J. A faster method of computing square roots of a matrix. IEEE Transactions on Automatic Control. 1978. 23 (3). P. 494–495.
5. Björck A., Hammarling S. A Schur method for the square root of a matrix. Linear Algebra and its Applications. 1982. 52/53. P. 127–140.
6. Higham N. J. Newton's method for the matrix square root. Mathematics of Computation. 1986. 46 (174). P. 537–549.
7. Sullivan D. The square roots of 2×2 matrices. Math. Magazine. 1993. 66 (5). P. 314–316.
8. Higham N. J. Stable iterations for the matrix square root. Numerical Algorithms. 1997. 15 (2). P. 227–242.
9. Hasan M. A. A power method for computing square roots of complex matrices. Journal of Mathematical Analysis and Applications. 1997. 213 (2). P. 393–405.
10. Johnson C. R., Okubo K., Reams R. Uniqueness of matrix square roots and an applications. Linear Algebra and its applications. 2001. 323 (1–3). P. 51–60.
11. Johnson C. R., Okubo K. Uniqueness of matrix square roots under a numerical range condition. Linear algebra and its applications. 2002. 341 (1–3). P. 195–199.
12. Iannazzo B. A note on computing the matrix square root. Calcolo. Springer. 2003. 40 (4). P. 273–283.

13. Meini B. The matrix square root from a new functional perspective: theoretical results and com-putational issues. SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications. 2004. 26 (2). P. 362–376.
14. Liu Z., Zhang Y., Ralha R. Computing the square roots of matrices with central symmetry. Applied Mathematics and Computation. 2007. 186 (1). P. 715–726.
15. Zhang Y., Li W., Guo D., Ke Zh. Different Zhang functions leading to different ZNN models illustrated via time-varying matrix square roots finding. Expert Systems with Applications. 2013. 40 (11). P. 4393–4403.
16. Li C. M., Shen S. Q. Newton's Method for the Matrix Nonsingular Square Root. Journal of Applied Mathematics. Hindawi Pub. Corporation. 2014. Article ID 267042, 7 pages. doi.org/10.1155/2014/267042.
17. Soleymani F., Shateyi S., Khaksar Haghani F. A numerical method for computing the principal square root of a matrix. Abstract and Applied Analysis. Hindawi Pub. Corporation. 2014. Article ID 525087, 7 pages. URL: http://dx.doi.org/10.1155/2014/525087.
18. Sadeghi A. Approximating the principal matrix square root using some novel third-order iterative methods. Ain Shams Engineering Journal. 2016. 9 (4). P. 993–999.
19. Nichols J. A New Algorithm for Computing the Square Root of a Matrix. Thesis / Rochester Institute of Technology. 2016.
20. Del Moral P., Niclas A. A. Taylor expansion of the square root matrix function. Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2018. 465 (1). P. 259–266.
21. Gawlik E. S. Zolotarev Iterations for the Matrix Square Root. SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications. 2019. 40 (2). P. 696–719.
22. Казимирський П. С., Урбанович М. Н. О разложении матричного двучлена на множители. Украинский математический журнал. 1973. 25 (4). С. 454–464.
23. Melnyk O. M., Kolyada R. V. On square roots of integer matrices. Book of Abstracts of 11th International Algebraic Conference in Ukraine. Kyiv, 2017. P. 83.
24. Петричкович В. М., Прокип В. М. О факторизации многочленных матриц над произвольным полем. Украинский математический журнал. 1986. 38 (4). С. 478–483.
25. Прокіп В. М. Про єдиність унітального дільника матричного многочлена над довільним полем. Український математичний журнал. 1993. 45 (6). С. 803–808.

## REFERENCES

1. Gantmakher, F. R. (2004). Teoriia matritc. 5-e izd. Moskva : FIZMATLIT (in Russian).
2. Gohberg, I., Lancaster, P., & Rodman, L. (1982). Matrix polynomials. New York : Academic Press (in English).
3. Kazimirskyi, P. S. (1981). Rozklad matrychnykh mnohochleniv na mnozhnyky. Kyiv : Naukova dumka (in Ukrainian).
4. Hoskins, W. D., & Walton, D. J. (1978). A faster method of computing square roots of a matrix: IEEE Transactions on Automatic Control, 23 (3), 494–495 (in English).
5. Björck, A., & Hammarling S. (1982). A Schur method for the square root of a matrix: Linear Algebra and its Applications, 52/53, 127–140 (in English).
6. Higham, N. J. (1986). Newton's method for the matrix square root: Mathematics of Computation, 46 (174), 537–549 (in English).

7. Sullivan, D. (1993). The square roots of 2×2 matrices: Math. Magazine, 66 (5), 314–316 (in English).
8. Higham, N. J. (1997). Stable iterations for the matrix square root: Numerical Algorithms, 15 (2), 227–242 (in English).
9. Hasan, M. A. (1997). A power method for computing square roots of complex matrices: Journal of Mathematical Analysis and Applications, 213 (2), 393–405 (in English).
10. Johnson, C. R., Okubo, K., & Reams, R. (2001). Uniqueness of matrix square roots and an applications: Linear Algebra and its applications, 323 (1–3), 51–60 (in English).
11. Johnson, C. R., & Okubo, K. (2002). Uniqueness of matrix square roots under a numerical range condition: Linear algebra and its applications, 341 (1–3), 195–199 (in English).
12. Iannazzo, B. (2003). A note on computing the matrix square root. Calcolo: Springer, 40 (4), 273–283 (in English).
13. Meini, B. (2004). The matrix square root from a new functional perspective: theoretical results and computational issues: SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications, 26 (2), 362–376 (in English).
14. Liu, Z., Zhang, Y., & Ralha, R. (2007). Computing the square roots of matrices with central symmetry: Applied Mathematics and Computation, 186 (1), 715–726 (in English).
15. Zhang, Y., Li, W., Guo, D., & Ke, Zh. (2013). Different Zhang functions leading to different ZNN models illustrated via time-varying matrix square roots finding: Expert Systems with Applications, 40 (11), 4393–4403 (in English).
16. Li, C. M., & Shen, S. Q. (2014). Newton's Method for the Matrix Nonsingular Square Root: Journal of Applied Mathematics. Hindawi Pub. Corporation. Article ID 267042, 7 pages. doi: org/10.1155/2014/267042 (in English).
17. Soleymani, F., Shateyi, S., & Khaksar, Haghani F. (2014). A numerical method for computing the principal square root of a matrix. Abstract and Applied Analysis: Hindawi Pub. Corporation. Article ID 525087, 7 pages. Retrieved from http://dx.doi.org/10.1155/2014/525087 (in English).
18. Sadeghi, A. (2016). Approximating the principal matrix square root using some novel third-order iterative methods: Ain Shams Engineering Journal, 9 (4), 993–999 (in English).
19. Nichols, J. (2016). A New Algorithm for Computing the Square Root of a Matrix. Thesis / Rochester Institute of Technology (in English).
20. Del Moral, P., & Niclas, A. A. (2018). Taylor expansion of the square root matrix function: Journal of Mathematical Analysis and Applications, 465 (1), 259–266 (in English).
21. Gawlik, E. S. (2019). Zolotarev Iterations for the Matrix Square Root: SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications, 40 (2), 696–719 (in English).
22. Kazimirskii, P. S., & Urbanovich, M. N. (1973). O razlozhenii matrichnogo dvuchlena na mnozhiteli: Ukrainskii matematicheskii zhurnal, 25 (4), 454–464 (in Russian).
23. Melnyk, O. M., & Kolyada, R. V. (2017). On square roots of integer matrices. Book of Abstracts of 11th International Algebraic Conference in Ukraine. Kyiv (in English).
24. Petrichkovich, V. M., & Prokip, V. M. (1986). O faktorizatcii mnogochlennykh matritc nad proizvolnym polem: Ukrainskii matematicheskii zhurnal, 38 (4), 478–483 (in Russian).
25. Prokip, V. M. (1993). Pro yedynist unitalnoho dilnyka matrychnoho mnohochlena nad dovilnym polem: Ukrainskyi matematychnyi zhurnal, 45 (6), 803–808 (in Ukrainian).

**doi: 10.32403/1998-6912-2019-2-59-56-64**

## ABOUT SQUARE ROOTS OF MATRICES OVER AN ARBITRARY FIELD

R. V. Kolyada[1], O. M. Melnyk[1], V. M. Prokip[2]

*[1]Ukrainian Academy of Printing,*
*19, Pid Holoskom, St., Lviv, 79020, Ukraine*

*[2]IAPMM NAS of Ukraine,*
*3b, Naukova St., Lviv, 79060, Ukraine*
*rostyslavakolyada@gmail.com, melnykorest@gmail.com, v.prokip@gmail.com*

*It is said that an $n \times n$ –matrix B is the square root of an $n \times n$ –matrix A over a field F if and only if $B^2 = A$. The square roots of matrices are the main concepts for calculation of the polar decomposition of a matrix, solvability of differential equations and for construction of Markov financial model. It is evident that a matrix A has a square root if and only if the matrix equation $X^2 = A$ is solvable. It is known that square roots of complex numbers C always exist, but square roots of matrices over the field of complex numbers C may not exist. On the other hand, a non-zero matrix can have an infinite number of square roots. The problem of existence of square roots for matrices over the field of complex numbers is well studied. It may be noted that the problem of existence of square roots of matrices over an arbitrary field has been poorly researched.*

*In this article we study the problem of existence of square roots of matrices over an arbitrary field F. Under certain restrictions we give necessary and sufficient conditions for existing the square root B with given characteristic polynomial $b(\lambda) \in F[\lambda]$ for a matrix A over a field F. It has been proved if the given square root exists, then it is uniquely defined by polynomial $b(\lambda)$ and we suggest a method of finding it. This allows us to give a complete solution to the problem of square roots of matrices over arbitrary field F with relatively prime elementary divisors.*

*This research method allows us to specify the classes of matrices for which the number of square roots is finite.*

***Keywords:*** *Square root of a matrix, rank of matrix, characteristic polynomial, linear matrix equation.*

*Стаття надійшла до редакції 15.08.2019.*
*Received 15.08.2019.*