

УДК 539.3

РОЗРАХУНОК НЕСКІНЧЕННОЇ ПЛИТИ НА НЕДЕФОРМІВНІЙ ОСНОВІ ПІД ДІЄЮ ЛОКАЛЬНОГО НАВАНТАЖЕННЯ АНАЛІТИЧНИМ МЕТОДОМО. Г. Гуртовий¹, С. О. Тинчук¹, Л. С. Угрин²

¹Національний університет водного господарства та природокористування,
вул. Соборна, 11, Рівне, 33028, Україна

²Українська академія друкарства,
вул. Під Голоском, 19, Львів, 79020, Україна

Для розрахунку напружено-деформованого стану (НДС) нескінченної плити на недеформівній основі застосовано уточнену модель симетричного відносно серединної поверхні плити НДС. Розглядається плита подвійної товщини, двосторонньо симетрично навантажена, яку утворено симетричною добудовою відносно поверхні контакту її з основою. Уточнена модель отримана за методикою, яку запропонували професори О. Ф. Рябовий та В. Г. Піскунов. Згідно з нею кінематичні співвідношення класичної теорії пластин підставляються в співвідношення закону Гука, отримані напруження інтегруються в рівняння рівноваги тривимірної теорії пружності, що дає змогу отримати уточнені вирази для напружень поперечного зсуву і поперечного обтиснення. Далі застосовується знову закон Гука і співвідношення Коші, що дає змогу отримати уточнені кінематичні співвідношення в першому та наступних ітераційних наближеннях.

Така схема моделює зсув без тертя на поверхні контакту плити з основою. Жорсткий контакт плити з основою моделюється введенням додаткового тонкого, але практично недеформованого прошарку. Використана уточнена континуальна модель враховує деформації поперечного зсуву та поперечного обтиснення у високих ітераційних наближеннях і містить одну функцію поперечного зсуву та дві функції поперечного обтиснення. Система чотирьох розрахункових диференціальних рівнянь має загальний дванадцятий порядок диференціювання, що не залежить від кількості шарів у пластині.

Отримано аналітичний розв'язок для нескінченної плити під дією зосередженої сили посередині. Пораховані прогини у перерізі плити під зосередженою силою як для однорідної ізотропної плити, так і для плити з дефектом розшарування, яку розглянуто як багатошарову пластину з тонким шаром проковзування. Проаналізовано особливості деформації плит на жорсткій основі при дії зосередженого навантаження.

Ключові слова: нескінченна плита, уточнена модель, поперечний зсув, поперечне обтиснення, аналітичний метод.

Постановка проблеми. Отримання аналітичних розв'язків задач теорії пружності є завжди актуальним, оскільки ці розв'язки є еталонними для розв'язків, отриманих чисельними методами. До таких задач належить і задача визначення НДС багат шарових плит на недеформівних основах при дії поперечного локального навантаження. Багат шаровий пакет дає змогу створювати багатофункціональні конструкції. У техніці та будівництві задачі розрахунку плит на жорсткій основі трапляються під час розрахунку багатофункціональних багат шарових покриттів плоских елементів конструкцій, покриттів обладнання, зокрема емалевих покриттів корпусів хімічних апаратів, багат шарового дорожнього одягу на достатньо жорстких скельних ґрунтах, на жорстких мостових, тунельних конструкціях транспортних споруд.

За своєю природою розрахунок покриттів на жорсткій основі близький до контактних задач. Це пов'язано з суттєвим впливом на НДС плити деформацій поперечного обтиснення, що має відображати уточнена модель, яка застосовується для розрахунку. Потрібно зазначити, що використання уточнених поперечно-зсувних моделей чи класичної теорії пластин призводить до тривіально-нульового розв'язку для НДС поперечно навантажених плит на жорсткій основі. Розроблені аналітичні розв'язки для НДС нескінченних пластин на деформівній пружній основі під дією полоси розподіленого навантаження посередині пластини в класичній та уточнених постановках. Для плит на жорсткій основі таких аналітичних розв'язків в уточненій постановці немає.

Аналіз останніх досліджень та публікацій. Дослідження НДС багат шарових пластин, особливо з трансверсально-ізо тропними шарами малої поперечної жорсткості, потребує застосування уточнених моделей, що враховують вплив на НДС поперечних зсувних деформацій та поперечного обтиснення. Введенням у пластину тонких шарів із малою жорсткістю на зсув, коли модулі поперечного зсуву на декілька порядків менші за модулі зсуву сусідніх шарів, можна моделювати тріщини зсуву. Проте для розв'язання таких задач необхідно застосовувати уточнені моделі високих ітераційних порядків уточнення. У плитах на жорсткій основі визначальною є беззгинова складова НДС, а відомі уточнені моделі НДС плит [1, 2], що враховують поперечне обтиснення та поперечні зсуви, зорієнтовані переважно на описання згинового НДС. Тому виникає потреба у застосуванні уточненої моделі, яка може з високою точністю описувати беззгинову складову НДС багат шарової плити на недеформівній основі.

У публікації [3] запропоновано гіпотези та побудовано спеціальну модель беззгинового деформування однорідної та шаруватої плити, яка в поєднанні з моделлю згинового деформування дає результати, що близькі до точного тривимірного розв'язку. У статтях [4, 5] розглянуті структурно-континуальні моделі НДС поперечно навантажених плит, в яких ідея ітераційного моделювання [3] застосована для плит на жорсткій основі. Проте у цих публікаціях розглянуті задачі при дії на плиту лише синусоїдального навантаження.

Мета статті — з використанням підходів [3–5] до моделювання НДС плит на жорсткій основі показати можливість отримання аналітичного розв'язку для

нескінченної плити під дією зосередженого локального навантаження, зокрема із врахуванням поздовжнього розшарування плити.

Виклад основного матеріалу дослідження. Розглядається задача плоскої деформації багатшарової нескінченної $-\infty \leq x_i \leq \infty$ плити на жорсткій основі під дією розподіленого навантаження інтенсивністю F по лінії $x_1 = 0$. Під час розв'язку використовується підхід оптимізації розрахункової схеми плити [5], для чого плита симетрично добудовується відносно поверхні контакту цієї плити з основою. Плита буде у цьому випадку двосторонньо симетрично навантаженою відносно серединної поверхні плити, а товщина плити збільшиться вдвоє $H = 2h$. Водночас контакт плити з основою відповідає умовам проковзування без тертя. Для моделювання жорсткого контакту плити з основою вводиться додатковий тонкий, але практично недеформівний прошарок в зоні серединної поверхні симетризованої плити.

Запропонований підхід дає змогу оптимізувати розглянуту в публікації [4] уточнену модель НДС плити, яка складалася з двох якісно відмінних НДС — згинового і беззгинового. Згинова складова НДС зникає, оскільки НДС в симетричній за структурою плиті при двосторонньому симетричному навантаженні повністю описується беззгиновим НДС. Як наслідок, кількість невідомих функцій і, відповідно, порядок диференціювання розрахункової системи рівнянь у задачі істотно зменшуються.

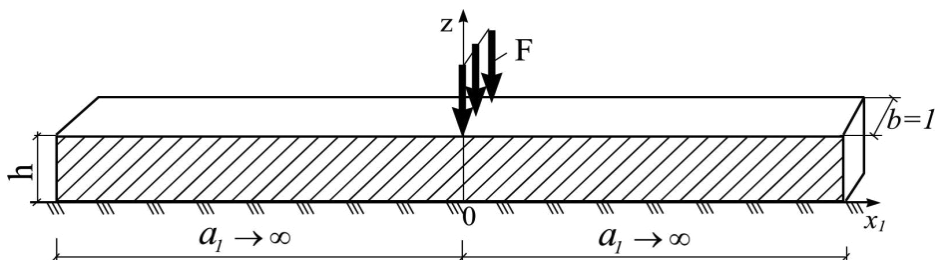


Рис. 1. Схема нескінченної плити на недеформівній основі

Для розрахунку НДС полоси плити одиничної ширини (рис. 1) використаємо уточнену модель [5] при утриманні в ній двох невідомих функцій поперечного обтиснення γ_1 та γ_2 і однієї функції поперечного зсуву β_{11} та функції тангенціальних зміщень v_1 на поверхні контакту плити з основою в напрямку Ox_1 у вигляді:

$$\begin{aligned} u_3^{(k)} &= \psi_{31,3}^{(k)} \gamma_1 + \psi_{32,3}^{(k)} \gamma_2; \\ u_1^{(k)} &= v_1 - \psi_{31}^{(k)} \gamma_{1,1} - \psi_{32}^{(k)} \gamma_{2,1} - \psi_{11}^{(k)} \beta_{11}. \end{aligned} \tag{1}$$

Гіпотетично задані функції $\psi_{3l}^{(k)}, \psi_{11}^{(k)}$, що моделюють розподіл зміщень за координатою z , мають такий вигляд [5]:

$$\begin{aligned} \psi_{31,3}^{(k)} &= \int_0^z a_{3333}^{(s)} F_1^{(s)} dz; & \psi_{32,3}^{(k)} &= \int_0^z a_{3333}^{(s)} dz; & s &= \overline{1, k}; \\ \psi_{11}^{(k)} &= -\int_0^z a_{1313}^{(s)} f_{11}^{(s)} dz; & \psi_l^{(k)} &= \int_0^z \psi_{l,3}^{(s)} dz; & l &= 1, 2, \end{aligned} \tag{2}$$

які для випадку однорідної плити запишуться у вигляді:

$$\begin{aligned} \psi_{31,3} &= A_{1111} a_{3333} H^5 (48\xi^5 - 40\xi^3 + 15\xi) / 5760; \quad \xi = z / H; \quad H = 2h; \\ \psi_{32,3} &= a_{3333} H \xi; \quad \psi_{32} = a_{3333} H^2 \xi^2 / 2; \quad \psi_{11} = -A_{1111} a_{1313} H^4 (2\xi^4 - \xi^2) / 48; \\ \psi_{31} &= A_{1111} a_{3333} H^6 (16\xi^6 - 20\xi^4 + 15\xi^2) / 11520, \end{aligned} \quad (3)$$

де $A_{\alpha\beta\gamma\delta}$ та $a_{\alpha\beta\gamma\delta}$ — коефіцієнти закону Гука $\sigma_{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta\gamma\delta} e_{\gamma\delta}$ і $e_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta\gamma\delta} \sigma_{\gamma\delta}$. Тут і надалі диференціювання по x_α позначено нижніми індексами після коми.

Загальний розв'язок, відповідно до методики [6], запишемо у вигляді:

$$v_1 = \bar{A} \cdot e^{kx}; \quad \gamma_1 = \bar{B} \cdot e^{kx}; \quad \gamma_2 = \bar{C} \cdot e^{kx}; \quad \beta_{11} = \bar{D} \cdot e^{kx}. \quad (4)$$

Підставивши (4) в однорідну систему розрахункових рівнянь у зміщеннях $[L] \cdot [u] = [p]$ із публікації [5], отримуємо характеристичне рівняння у вигляді матриці 4×4 :

$$\begin{vmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} \end{vmatrix} = 0, \quad (5)$$

коефіцієнти характеристичного рівняння мають вигляд:

$$\begin{aligned} S_{11} &= -k^2 B_0; \quad S_{12} = -S_{21} = k^3 B_{31} - k P_1; \\ S_{13} &= -S_{31} = k^3 B_{32} - k P_2; \quad S_{14} = S_{41} = k^2 B_{11}; \\ S_{22} &= k^4 D_{11}^{33} - k^2 (H_{11}^3 + J_{11}^3) - R_{11}; \\ S_{23} &= S_{32} = k^4 D_{12}^{33} - k^2 (H_{12}^3 + J_{12}^3) - R_{12}; \quad S_{24} = -S_{42} = k^3 D_{11}^{31} - k H_{11}^1; \\ S_{33} &= k^4 D_{22}^{33} - k^2 (H_{22}^3 + J_{22}^3) - R_{22}; \quad S_{34} = -S_{43} = k^3 D_{21}^{31} - k H_{12}^1; \\ S_{44} &= -k^2 D_{11}^{11} + T_{11}^1. \end{aligned} \quad (6)$$

Рівняння (5) і (6) містять коефіцієнти, що характеризують геометричні та фізичні параметри шарів плити і визначаються так:

$$\begin{aligned} B_0 &= \int_{-b_n}^{b_n} A_{1111} dz; \quad B_{\alpha s} = \int_{-b_n}^{b_n} A_{1111} \psi_{\alpha s} dz; \quad P_t = \int_{-b_n}^{b_n} A_{1133} \psi_{3t,33} dz; \\ D_{fs}^{\alpha\mu} &= \int_{-b_n}^{b_n} A_{1111} \psi_{\alpha f} \psi_{\mu s} dz; \quad \alpha, \mu = 1, 3; \quad s, f = \overline{1, 2}; \\ J_{ft}^\alpha &= \int_{-b_n}^{b_n} A_{1133} \psi_{\alpha f} \psi_{3t,33} dz; \quad H_{ts}^\alpha = \int_{-b_n}^{b_n} A_{1133} \psi_{3t,33} \psi_{\alpha s} dz; \\ R_{tq} &= \int_{-b_n}^{b_n} A_{3333} \psi_{3t,33} \psi_{3q,33} dz; \quad T_{11}^1 = \int_{-b_n}^{b_n} G' \psi_{11,3} \psi_{11,3} dz; \quad t, q = \overline{1, 2}, \end{aligned} \quad (7)$$

де $b_n = H / 2 = h$ — координата верхньої поверхні плити.

Характеристичне рівняння (5), наприклад, для випадку однорідної ізотропної плити з $E = 1 \cdot 10^4$ МПа; $\nu = 0,25$ запишеться у вигляді:

$$5,296 \cdot 10^{-6} k^{12} - 7,747 \cdot 10^{-2} k^{10} + 1,007 k^8 - 143,62 k^6 + 878,66 k^4 - 4408,2 k^2 = 0.$$

Розв'язком характеристичного рівняння (5) будуть два нульові корені $k_1 = k_2 = 0$; чотири пари комплексно спряжених коренів $k_3 = -k_4 = a - ib$; $k_5 = -k_6 = a + ib$; $k_7 = -k_8 = c - id$; $k_9 = -k_{10} = c + id$, а також два дійсні корені $k_{11} = -k_{12} = f$.

Загальний розв'язок, наприклад, для функції v_1 (функції зміщень на поверхні ковзкого контакту плити з основою) запишеться у вигляді:

$$\begin{aligned} v_1 &= C_1 + C_2 x + e^{ax} (C_3 \cos bx + C_5 \sin bx) + e^{-ax} (C_4 \cos bx + C_6 \sin bx) + \\ &+ e^{cx} (C_7 \cos dx + C_9 \sin dx) + e^{-cx} (C_8 \cos dx + C_{10} \sin dx) + C_{11} e^{fx} + C_{12} e^{-fx}, \end{aligned} \quad (8)$$

де $C_\mu (\mu = \overline{1, 12})$ — сталі інтегрування, що визначаються із граничних умов.

У нескінченно довгій полосі плити, що має одиничну ширину, дія «зосередженого» навантаження F посередині полоси призводить до затухання зміщень на нескінченно віддалених кінцях плити так, що зміщення $u_\alpha^{(k)}$ перетворюються в нуль. Це можливо, якщо $C_2 = C_3 = C_5 = C_7 = C_9 = C_{11} = 0$. Тоді вираз (8) матиме вигляд:

$$v_1 = C_1 + e^{-\alpha x} (C_4 \cos bx + C_6 \sin bx) + e^{-cx} (C_8 \cos dx + C_{10} \sin dx) + C_{12} e^{-fx}. \quad (9)$$

Подібний вигляд мають розв'язки і для інших шуканих функцій γ_i і β_{1i} :

$$\gamma_1 = \overline{B}_4 \cdot e^{-\alpha x} (C_4 \cos bx + C_6 \sin bx) + \overline{B}_8 \cdot e^{-cx} (C_8 \cos dx + C_{10} \sin dx) + \overline{B}_{12} \cdot C_{12} e^{-fx};$$

$$\gamma_2 = \overline{C}_4 \cdot e^{-\alpha x} (C_4 \cos bx + C_6 \sin bx) + \overline{C}_8 \cdot e^{-cx} (C_8 \cos dx + C_{10} \sin dx) + \overline{C}_{12} \cdot C_{12} e^{-fx};$$

$$\beta_{11} = \overline{D}_4 \cdot e^{-\alpha x} (C_4 \cos bx + C_6 \sin bx) + \overline{D}_8 \cdot e^{-cx} (C_8 \cos dx + C_{10} \sin dx) + \overline{D}_{12} \cdot C_{12} e^{-fx}. \quad (10)$$

Для відшукування інших сталей інтегрування необхідно виконати граничні умови у поперечному перерізі під силою F посередині плити (при $x_1 = 0$):

– кінематичні умови: $v_1 = 0; \gamma_{1,1} = 0; \gamma_{2,1} = 0; \beta_{11} = 0;$ (11)

– статичні умови: $M_{11,1}^{[13]} - Q_1^{[13]*} = 0; M_{11,1}^{[23]} - Q_3^{[23]*} = 0,$ (12)

де $M_{11}^{[r3]}$ — узагальнений згинний момент:

$$M_{11,1}^{[r3]} = \int_{-b_n}^{b_n} \sigma_{11,1}^{(k)} \psi_{3r}^{(k)} dz; \quad t = 1, 2; \quad (13)$$

$Q_t^{[r3]*}$ — узагальнена поперечна сила в центрі плити:

$$Q_t^{[r3]*} = F \cdot \psi_{3r,3}^{(n)} \text{ при } z = h. \quad (14)$$

Для кожного з коренів $k_\mu (\mu = \overline{1, 12})$ із характеристичного рівняння (5) знаходяться значення коефіцієнтів $A_\mu = 1, B_\mu, C_\mu$ та D_μ в (4), а потім із системи рівнянь (11), (12) отримуємо шуканий розв'язок для сталей інтегрування C_μ .

Розв'язок цієї задачі містить тільки загальний розв'язок і має затухаючий характер при $x_1 \rightarrow \infty$.

Для полоси шириною $b = 1$ м ізотропної плити з $E = 1 \cdot 10^4$ МПа; $\nu = 0,25$, вертикальні зміщення в поперечному перерізі при $x_1 = 0$ та $F = 10$ кН/м показано у табл. (варіант $B1$).

Таблиця

Величина прогину в нескінченній плиті (в перерізі при $x_1 = 0$)

Варіанти	z/h	1	0,8	0,5	0
$B1$	$u_3,$	55,93	22,32	10,16	0
$B2$	мм	57,67	24,09	11,83	0

Розглядається також задача деформування зосередженою силою нескінченної ізотропної плити. Пружні характеристики плити такі ж, як і в попередній задачі, але в плиті наявний дефект розшарування при $z/h = 0,5$, що моделюється введенням тонкого трансферсально-ізотропного шару $h_d^{(2)} = h/200$ ($0,5h \leq z \leq 0,505h$) з характеристиками пружності $E'_d = E^{(1)}$; $E_d = E^{(1)}/10^3$; $\nu_d = \nu'_d = 0$; $G_d = G'_d = E_d/2$ (варіант $B2$ в табл.).

З результатів розрахунку (табл.) видно, що введення шару проковзування дещо збільшує величину прогину u_3 під навантаженням.

Висновки. Запропоновано уточнену модель з визначення напружено-деформованого стану багатшарової пластини на недеформівній основі, що містить під час розгляду плоскої деформації одну функцію поперечного зсуву та дві функції поперечного обтиснення. З використанням такої моделі аналітично розв'язано задачу про деформування нескінченної полоси на недеформівній основі при дії локального зосередженого навантаження посередині полоси. Отримано чисельні результати для прогинів посередині ізотропної однорідної полоси, а також для тришарової трансверсально-ізотропної полоси, в якій змодельовано дефект поздовжнього розшарування, причому прогини в останній дещо більші, ніж в однорідній полосі.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Пискунов В. Г. Об одном варианте неклассической теории многослойных пологих оболочек и пластин. Прикладная механика. 1979. Т. 15. № 11. С. 76–81.
2. Рассказов А. О. К теории многослойных ортотропных пологих оболочек. Прикладная механика. 1976. Т. 12. № 11. С. 50–56.
3. Гуртовий А. Г. Высокоточное моделирование деформирования слоистых структур. Механика композитных материалов. 1999. Т. 35. № 1. С. 13–28.
4. Гуртовий О. Г. Задача поперечного деформування трансверсально-ізотропної плити при контакті з абсолютно жорсткою основою. «Вісник УДУВГП». Рівне : УДУВГП, 2004. Вип. 2 (26). С. 222–229.
5. Гуртовий А. Г., Тынчук С. А. Безыгбная уточненная модель деформирования многослойных плит на недеформируемом основании. Механика композитных материалов. 2006. Т. 42. № 5. С. 643–654.
6. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов: учеб. пособ. для втузов. 13-е изд. Т. 2. Москва : Наука, 1985. 560 с.

REFERENCES

1. Piskunov, V. G. (1979). Ob odnom variante neklassicheskoi teorii mnogoslnoykh pologikh obolochek i plastin: Prikladnaia mekhanika, 15, 11, 76–81 (in Russian).
2. Rasskazov, A. O. (1976). K teorii mnogoslnoykh ortotropnykh pologikhobolochek: Prikladnaia mekhanika, 12, 11, 50–56 (in Russian).
3. Gurtoviy, A. G. (1999). Vysokotochnoe modelirovanie deformirovaniia sloistykh struktur: Mekhanika kompozitnykh materialov, 35, 1, 13–28 (in Russian).
4. Hurtovyi, O. H. (2004). Zadacha poperechnoho deformuvannia transversalno-izotropnoi plyty pry kontakti z absolutno zhorstkoiu osnovoju: «Visnyk UDUVHP». Rivne : UDUVHP, 2 (26), 222–229 (in Ukrainian).
5. Gurtoviy, A. G., & Tynchuk, S. A. (2006). Bezygibnaia utochnennaia model deformirovaniia mnogoslnoykh plit na nedeformiruемом osnovanii: Mekhanika kompozitnykh materialov, 42, 5, 643–654 (in Russian).
6. Piskunov, N. S. (1985). Differentsialnoe i integralnoe ischislenie dlia vtuzov. 13-e izd. T. 2. Moskva : Nauka (in Russian).

CALCULATION OF INFINITE PLATE ON AN UNDEFORMED FOUNDATION UNDER THE ACTION OF LOCAL LOADING BY THE ANALYTICAL METHOD

O. H. Hurtovyi¹, S. O. Tynchuk¹, L. S. Uhryn²

¹*National University of Water and Environmental Engineering,
11, Soborna St., Rivne, 33028, Ukraine
o_g_gurtovy@ukr.net, s.o.tynchuk@nuwm.edu.ua*

²*Ukrainian Academy of Printing,
19, Pid Holoskom St., Lviv, 79020, Ukraine
lubouh@gmail.com*

A refined model of symmetrical stress-strain state (SSS) plate about its mid-surface has been used for calculating the SSS of infinite plate on an undeformed foundation. The double-thickness plate bilaterally symmetrically loaded about its mid-surface has been considered. The plate is formed by symmetric supplementing it with regard to the contact surface and the foundation.

The refined model has been obtained according to the method suggested by Professors O.F.Ryabov and V.G.Piskunov. According to the method, kinematic ratios of classical plate theory are substituted into the Hooke's law, the obtained stresses are integrated into the equations of equilibrium of the three-dimensional theory of elasticity, which allows to obtain refined expressions for the stresses of transverse shear and transverse compression. The Hooke and Cauchy law is again applied here, resulting in the refinement of the kinematic relations in the first and subsequent iterative approximations.

Such a diagram models the frictionless slip of the plate over surface of its contact with the foundation. The rigid contact of the plate with the foundation is modelled by introducing an additional thin practically undeformed layer. The refined continual model has been used to take into account the deformations of transverse shear and transverse compression in high iterative approximation. The model has one transverse shear function and two transverse compression functions. The system of four calculated differential equations has a general twelfth order of differentiation which does not depend on the number of layers in the plate.

An analytical solution for an infinite plate under the action of concentrated force in the middle has been obtained. The deflections in the cross-section of the plate under the concentrated force, both for a homogeneous isotropic plate, and for a plate with a stratification defect have been calculated which is considered as a multilayer plate with a thin layer of slip. The features of deformation of plates on a rigid foundation under the action of a concentrated load have been analyzed.

Keywords: *infinite plate, a refined model, transverse shear, transverse compression, analytical method.*

Стаття надійшла до редакції 08.08.2019.

Received 08.08.2019.