

УДК 518.61

ДОСЛІДЖЕННЯ ПРОЦЕСУ ВІБРОАКТИВНОСТІ РОТОРА АСИНХРОННОГО ДВИГУНА МЕТОДОМ ДРОБОВО-РАЦІОНАЛЬНИХ НАБЛИЖЕНЬ

О.М. Нечай

Питанню математичного моделювання асинхронних двигунів зі змінним повітряним зазором у літературі приділяється все більше уваги. Проте при цьому приймається, що координати центру обертання ротора фіксовані в просторі або переміщуються за наперед відомою траєкторією. В уточненому розв'язку ці координати належать до невідомих і обчислюються з диференціальних рівнянь руху ротора. Це у значній мірі сприяє більш адекватному опису фізичного процесу. При удосконаленні характеристик жорсткості елементів конструкції необхідно ще на стадії проектування з достатньою точністю оцінити віброактивність машини. Реально здійснити це можна лише математичним моделюванням вібраційного процесу.

Вопросу математического моделирования асинхронных двигателей со сменным воздушным зазором в литературе уделяется все больше внимания. Однако при этом принимается, что координаты центра вращения ротора фиксированы в пространстве или передвигаются по ранее известной траектории. В уточненном решении эти координаты принадлежат к неизвестным и исчисляются из дифференциальных уравнений движения ротора. Это значительно способствует более адекватному описанию физического процесса. При усовершенствовании характеристик жесткости элементов конструкции необходимо еще на стадии проектирования достаточно точно оценить виброактивность машины. Реально осуществить это возможно лишь математическим моделированием вибрационного процесса.

Одним із першочергових завдань електромашинобудування є зниження віброактивності електричних машин. Вирішення цього питання можливе двома способами – виготовленням деталей конструкцій з більшими допусками при випуску машин або заміною характеристик жорсткості елементів конструкції. В останньому випадку необхідно ще на стадії проектування з достатньою точністю оцінити віброактивність машини. Реально здійснити це можна лише математичним моделюванням вібраційного процесу.

Розглянемо коливний процес у площині поперечного перерізу машини з урахуванням пружно-дисипативних властивостей опор ротора та статора, нерівномірності повітряного зазора й сил одностороннього магнітного притягання. Статор і ротор розглядаємо як абсолютно тверді тіла масою, відповідно, m_S і m_R , а моменти інерції відносно центрів мас c_{Sm} , c_{Rm} , – J_S і J_R (рис. 1). Статор і ротор установлені на n і m пружно-податливих опорах. Дисбаланс конструкції статора враховуємо зміщенням центра маси c_{Sm} відносно осі циліндричної розточки статора c_S на величину δ , а ротора – ексцентриситетом ε . У нерухомих ортогональних осях xOy координати центрів обертання статора – x_S, y_S , ротора – x_R, y_R , а їх центрів мас – x_{Sm}, y_{Sm} і x_{Rm}, y_{Rm} . Кут повороту статора – γ_S , ротора – γ_R .

Координати центра обертання мас пов'язані співвідношеннями, які отримуємо з побудов рис. 1.

$$\begin{aligned} x_S &= x_{Sm} - \delta \sin \gamma_S; & y_S &= y_{Sm} + \delta \cos \gamma_S; \\ x_R &= x_{Rm} - \varepsilon \cos \gamma_R; & y_R &= y_{Rm} - \varepsilon \sin \gamma_R. \end{aligned} \tag{1}$$

Візьмемо рухому систему декартових координат ξ і χ , яка містить спільний центр з нерухомою системою x і y , таким чином, щоб вісь x проходила по лінії мінімального повітряного зазора між поверхнями статора й ротора. Кут повороту цієї системи координат

$$\gamma = \arctg \frac{y_R - y_S}{x_R - x_S} \tag{2}$$

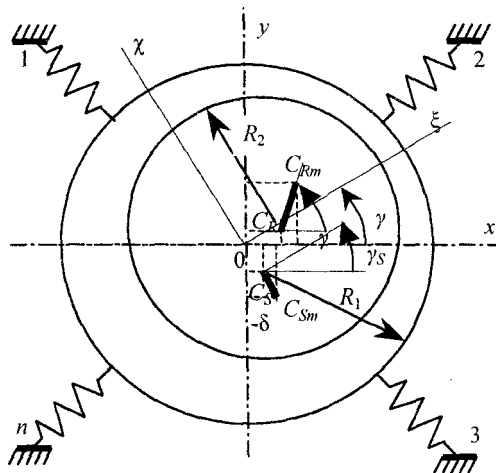


Рис. 1. Розрахункова схема механічної системи

Кутова швидкість обертання рухомих координат ω і кут повороту γ пов'язані співвідношенням

$$\frac{d\gamma}{dt} = \omega. \quad (3)$$

Диференціюючи (8) з [2] за часом, маємо

$$\omega = \frac{(x_R - x_S)(v_{yR} - v_{yS}) - (y_R - y_S)(v_{xR} - v_{xS})}{(x_R - x_S)^2 + (y_R - y_S)^2}, \quad (4)$$

де $v_k (i = x, y; k = S, R)$ – лінійні швидкості центрів мас статора і ротора; ω_S, ω_R – кутові швидкості статора і ротора, причому

$$\frac{dx_{Sm}}{dt} = v_{xSm}; \quad \frac{dy_{Sm}}{dt} = v_{ySm}; \quad \frac{dx_{Rm}}{dt} = v_{xRm}; \quad \frac{dy_{Rm}}{dt} = v_{yRm}; \quad \frac{d\gamma_S}{dt} = \omega_S; \quad \frac{d\gamma_R}{dt} = \omega_R. \quad (5)$$

Насиченням магнітопроводу машини знехтуємо. Скористаємось диференціальним рівнянням

$$\frac{d\omega}{dt} = p_0 \cdot (3p_0(\psi_d i_{Sq} - \psi_q i_{Sd}) / 2 - M(\omega)) / J. \quad (6)$$

В осях ξ і χ рівняння моделі асинхронного мотора набувають вигляду

$$\begin{aligned} \frac{d\Psi_{S\xi}}{dt} &= u_\xi + p_0(\omega - \omega_S)\Psi_{S\chi} - r_S i_{S\xi}; & \frac{d\Psi_{S\chi}}{dt} &= u_\chi - p_0(\omega - \omega_S)\Psi_{S\xi} - r_S i_{S\chi}; \\ \frac{d\Psi_{R\xi}}{dt} &= p_0(\omega - \omega_R)\Psi_{R\chi} - r_R i_{R\xi}; & \frac{d\Psi_{R\chi}}{dt} &= p_0(\omega_R - \omega)\Psi_{R\xi} - r_R i_{R\chi}; \end{aligned} \quad (7)$$

$$i_{S\xi} = \alpha_S(\Psi_{S\xi} - \psi_\xi); \quad i_{S\chi} = \alpha_S(\Psi_{S\chi} - \psi_\chi); \quad i_{R\xi} = \alpha_R(\Psi_{R\xi} - \psi_\xi); \quad i_{R\chi} = \alpha_R(\Psi_{R\chi} - \psi_\chi).$$

Оскільки тепер оперуємо кутовими швидкостями не в ел.рад/с, а в рад/с, то це зумовлює появу множника p_0 .

Напруги статора

$$u_\xi = U_m \cos(\omega_0 t - p_0 \gamma_R), \quad u_\chi = U_m \sin(\omega_0 t - p_0 \gamma_R), \quad (8)$$

де U_m, ω_0 – амплітуда напруги мережі та її електрична кутова частота.

Основні потокозчеплення знаходимо за формулами

$$\psi_{\xi} = a \int_0^{2\pi} B_{\eta} \cos(p_0 \eta) d\eta, \quad \psi_{\chi} = a \int_0^{2\pi} B_{\eta} \sin(p_0 \eta) d\eta, \quad (9)$$

де η – кут, відрахований у рухомій системі координат від осі ξ ; B_{η} – індукція в точці, що віддалена від осі ξ на $p_0 \eta$ радіан; $a = \frac{2\omega l R_1}{\pi p_0}$ – сталий коефіцієнт, причому ω, l, R_1 – число ефективних витків фази, розрахункова довжина та внутрішній радіус розточки статора.

Магнітну індукцію знаходимо за значенням магнітної напруги зазора φ_{η} :

$$B_{\eta} = \frac{\mu_0 \varphi_{\eta}}{\delta(\eta)}. \quad (10)$$

Тут

$$\varphi_{\eta} = F_{\eta} - \varphi_{a\eta}, \quad (11)$$

де F_{η} – магніторушійна сила; $\varphi_{a\eta}$ – магнітна напруга на ділянках магнітопроводу за межами повітряного зазора, причому

$$F_{\eta} = \frac{3w}{\pi p_0} [(i_{S\xi} + i_{R\xi}) \cos p_0 \eta + (i_{S\chi} + i_{R\chi}) \sin p_0 \eta]; \quad (12)$$

$$\varphi_{a\eta} = \frac{R_m}{w} (\psi_{\xi} \cos p_0 \eta + \psi_{\chi} \sin p_0 \eta), \quad (13)$$

де R_m – магнітний опір двигуна без врахування опору зазора; $\delta(\eta)$ – повітряний зазор у точці η .

Функціональну залежність $\delta(\eta)$ отримуємо з геометричних побудов рис.1:

$$\delta(\eta) = \sqrt{(x_R - x_S)^2 + (y_R - y_S)^2 + R_1^2 - 2R_1 \sqrt{(x_R - x_S)^2 + (y_R - y_S)^2} \cos \eta} - R_2, \quad (14)$$

де R_2 – зовнішній радіус тіла ротора.

Вирази (8) – (14) дають змогу обчислити основні потокозчеплення ψ_{ξ} і ψ_{χ} .

$$\begin{bmatrix} \psi_{\xi} \\ \psi_{\chi} \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} 1 + TN & -TS \\ -TS & 1 + TM \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} DM + QS \\ DS + QN \end{bmatrix}, \quad (15)$$

де $\Delta = (1 + TM)(1 + TN) - T^2 S^2$; $T = \alpha_S + \alpha_R + \frac{\pi p_0}{3w^2} R_m$;

$$D = \alpha_S \Psi_{S\xi} + \alpha_R \Psi_{R\xi}; \quad D = \alpha_S \Psi_{S\chi} + \alpha_R \Psi_{R\chi};$$

$$M = b \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 p_0 \eta}{\delta(\eta)} d\eta; \quad S = b \int_0^{2\pi} \frac{\sin p_0 \eta \cos p_0 \eta}{\delta(\eta)} d\eta; \quad N = b \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 p_0 \eta}{\delta(\eta)} d\eta, \quad (16)$$

причому $b = \frac{3wa\mu_0}{\pi p_0}$ – сталий коефіцієнт.

Електромагнітний момент

$$M_E = \frac{3p_0 (\psi_{\xi} i_{S\chi} - \psi_{\chi} i_{S\xi})}{2}. \quad (17)$$

Питому силу одностороннього притягання знаходимо за формулою [2]:

$$f_{\eta} = \frac{B_{\eta}^2}{2\mu_0}. \quad (18)$$

Результуючі сили рухомих координатах будуть

$$F_{\xi} = R_1 l \int_0^{2\pi} f_{\eta} \cos \eta d\eta; \quad F_{\chi} = R_1 l \int_0^{2\pi} f_{\eta} \sin \eta d\eta. \quad (19)$$

З врахуванням (10), (18) інтеграли (19) матимуть такий вигляд:

$$F_{\xi} = c_0 \int_0^{2\pi} \frac{\varphi_{\eta}^2}{\delta^2(\eta)} \cos \eta d\eta; \quad F_{\chi} = c_0 \int_0^{2\pi} \frac{\varphi_{\eta}^2}{\delta^2(\eta)} \sin \eta d\eta, \quad (20)$$

де $c_0 = \frac{R_1 l \mu_0}{2}$ – сталий коефіцієнт.

Маючи струми і робочі потокозчеплення, значення φ_{η} можна знайти за формулами (11)–(13).

У практичних розрахунках інтеграли (16), (20) замінюються апроксимуючими формулами Симпсона.

Сили одностороннього магнітного притягання в нерухомих осях визначаємо в результаті перетворення координат:

$$F_x = F_{\xi} \cos \gamma_R - F_{\chi} \sin \gamma_R; \quad F_y = F_{\xi} \sin \gamma_R + F_{\chi} \cos \gamma_R. \quad (21)$$

Результуючі сили в напрямі осей x і y з врахуванням пружно-дисипативних властивостей опор будуть:

$$F_{Ri}(i = x, y) = f_i - \sum_{j=1}^m (c_{iRj}(\gamma_{Ri} - \gamma_{Si}) + v_{iRj}(v_{Ri} - v_{Si})); \quad (22)$$

$$F_{Si}(i = x, y) = F_{Ri} - \sum_{j=1}^m (c_{iRj}i_{Si} + v_{iRj}v_{Si}),$$

де c_{ikj} , v_{ikj} ($k = S, R$) – коефіцієнти жорсткості та дисипації опор за i -ю віссю.

Швидкості руху центрів мас статора та ротора одержимо із загального рівняння динаміки

$$\sum_{k=1}^N \left(F_k + R_k - m_k \frac{d^2 r_k}{dt^2} \right) \delta r_k = 0, \quad (23)$$

яке свідчить, що сума елементарних робіт, прикладених до точок системи активних сил, реакцій зв'язків і сил інерції, дорівнює нулю на будь-яких віртуальних переміщеннях системи, зважаючи на принцип Даламбера, і що під час руху механічної системи активна сила, реакція зв'язків і сила інерції складають зрівноважену систему сил для кожної точки системи.

Тоді

$$\frac{dv_{xkm}}{dt} = \frac{F_{kx}}{m_k}; \quad \frac{dv_{ykm}}{dt} = \frac{F_{ky} - m_k g}{m_k}, \quad k = S, R; \quad (24)$$

$$\frac{d\omega_S}{dt} = \frac{\left(F_{Sx} \delta \cos \gamma_S + F_{Sy} \delta \sin \gamma_S - M_E - \sum_{j=1}^n (c_{\gamma} S_j \gamma_S - v_{\gamma} S_j \omega_S) \right)}{J_S}; \quad (25)$$

$$\frac{d\omega_R}{dt} = \frac{M_E - M_M + F_{Rx} \varepsilon \sin \gamma_R + F_{Ry} \varepsilon \cos \gamma_R}{J_R},$$

де $c_{\gamma kj}, v_{\gamma kj}$ – коефіцієнти жорсткості та дисипації опор статора в оберненому напрямку; M_M – момент опору ротора.

Сумісному інтегруванню підлягає система 17-ти рівнянь (3), (5), (6), (25). Через високо-частотні коливання ця система жорстка, і її інтегрування є складним навіть для неявних методів. Знехтування податливістю окремих опор статора чи ротора призводить до того, що повна система диференціальних рівнянь зазнає певних спрощень, проте, як підтверджують результати, із застосуванням дробово-раціональних методів розв'язати цю задачу можна без цих спрощень.

Застосуємо дробово-раціональні наближення розв'язку задачі Коші

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0, \quad (26)$$

використовуючи усереднення послідовності тейлорівських наближень розв'язків з певними ваговими коефіцієнтами ω_j

$$y_{mn}^{[p]} = \sum_{j=0}^p \omega_j \cdot T_{p-j,n}, \quad (27)$$

де $T_{p-j,n}$ – тейлорівське наближення p - j -го порядку розв'язку задачі (1) у сітковому вузлі x_n

$$\omega_j = \frac{(-1)^j \alpha_j J_n^j h^j}{\sum_{i=0}^p (-1)^i \alpha_i h^i J_n^i}, \quad (28)$$

де J_n – значення матриці Якобі правої частини рівняння (1) у вузлі x_n ; α_i – відповідні скалярні параметри наближення обчислювальної стійкості; p – порядок наближення.

Використовуючи формули (27), (28), згідно з методикою визначення параметрів стійкості α_i , описаною в [1], побудуємо дробово-раціональні наближення 1–4-го порядків точності, які описуються формулами

$$\begin{aligned} & \frac{T_1 - \frac{h}{2} J_n T_0}{E - \frac{h}{2} J_n}, \quad \frac{T_{2,n} - \frac{h}{2} J_n T_{1,n} + \frac{h^2}{12} J_n^2 T_{0,1}}{E - \frac{h}{2} J_n + \frac{h^2}{12} J_n^2}, \\ & \frac{T_{3,n} - \frac{h}{2} J_n T_{3,n} + \frac{h^2}{10} J_n^2 T_{1,n} - \frac{h^3}{120} J_n^3 T_{0,n}}{E - \frac{h}{2} J_n + \frac{h^2}{10} J_n^2 - \frac{h^3}{120} J_n^3}, \\ & \frac{T_{4,n} - \frac{h}{2} J_n T_{3,n} + \frac{3h^2}{28} J_n^2 T_{2,n} - \frac{h^3}{84} J_n^3 T_{1,n} + \frac{h^4}{1680} J_n^4 T_{0,n}}{E - \frac{h}{2} J_n + \frac{3h^2}{28} J_n^2 - \frac{h^3}{84} J_n^3 + \frac{h^4}{1680} J_n^4}, \end{aligned} \quad (29)$$

де $T_{k,n}$ – часткова сума k -го порядку ряду Тейлора.

Для побудови чисельних методів дробово-раціонального виду на основі наближень (29) необхідно визначити спосіб апроксимації тейлорівських наближень $T_{1,n}, T_{2,n}, T_{3,n}, T_{4,n}$. Використовуючи відомі методи Рунге–Кутта [1], одержимо

$$k_1 = h f(x_n, y_n), \quad k_2 = h f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}), \quad k_3 = h f(x_n + h, y_n - k_1 + 2k_2),$$

$$k_4 = hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}), \quad k_5 = hf(x_n + h, y_n + k_4). \quad (30)$$

Тоді $T_{1n} = y_n + k_1$, $T_{2n} = y_n + k_2$, $T_{3n} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3)$, $T_{4n} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_4 + k_5)$. (31)

Значення J_n , які входять у (29), визначимо шляхом безпосереднього диференціювання правої частини системи по y або чисельним диференціюванням. Отримані чисельні методи використаємо для дослідження процесу віброактивності ротора асинхронного двигуна. Розрахуємо режим запуску для ненавантаженого асинхронного двигуна АК 52-4 й одержані результати подамо графічно.

Чисельний метод дробово-раціональних наближень дозволив з великою точністю порухувати змодельований процес. Охарактеризуємо окремі результати. Так, магнітний момент (рис. 2) має коливний затухаючий характер. Зміна кутової швидкості ротора (рис. 3) свідчить про високу жорсткість процесу й раптовий перехід у площину великих протилежних значень.

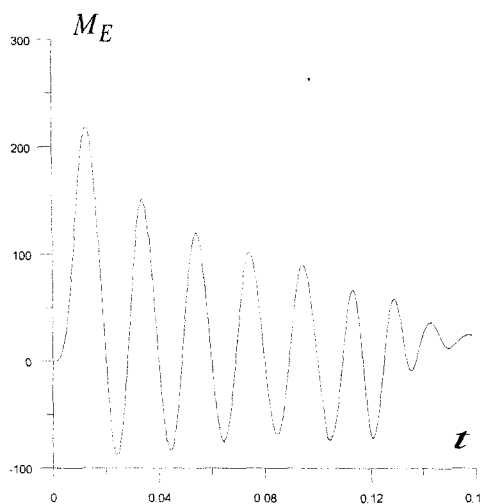


Рис. 2. Електромагнітний момент

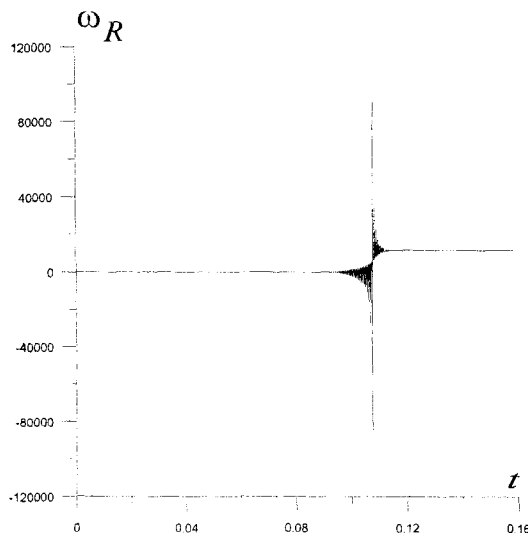


Рис. 3. Кутова швидкість ротора

Повні потокозчеплення ротора – це змінний коливний процес (рис. 4, 5).

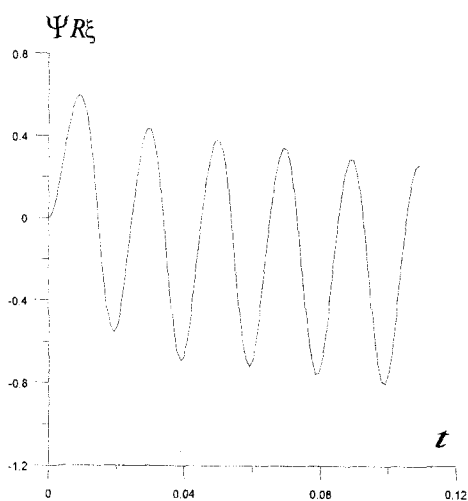


Рис. 4. Повне потокозчеплення ротора перетворених контурів $\Psi_{R\xi}$

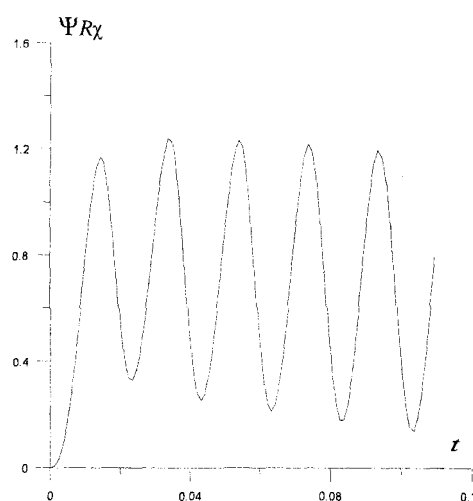


Рис. 5. Повне потокозчеплення ротора перетворених контурів Ψ_{Rx}

Поступливість опор ротора прослідковується на зміщенні координати центра обертання ротора (рис. 6, 7).

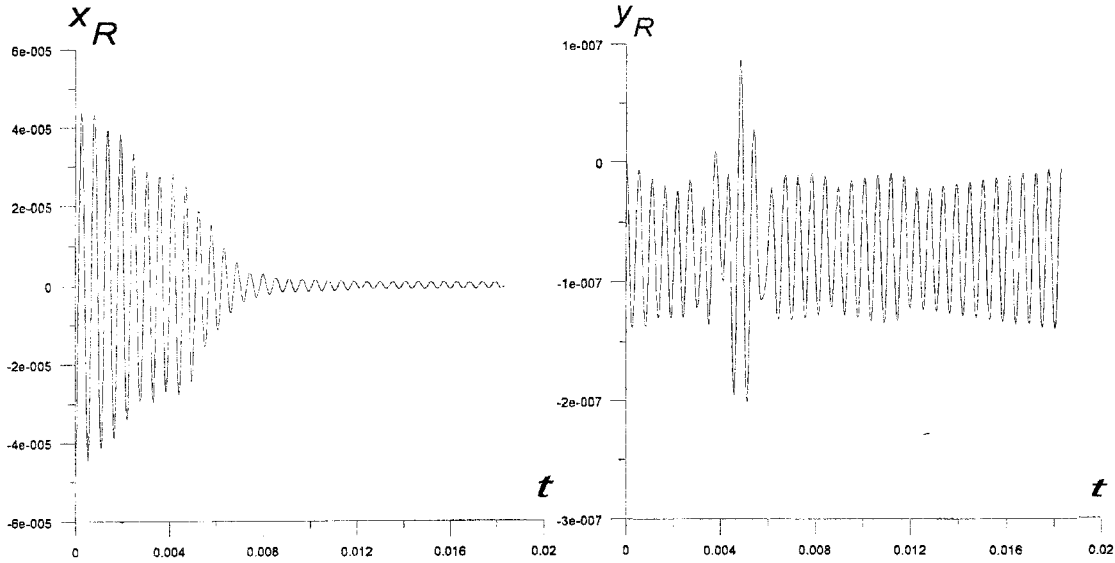


Рис. 6. Координата центра обертання x_R Рис. 7. Координата центра обертання y_R

Перехідний процес набирання швидкості ротора до усталеної величини поданий на рис. 8.

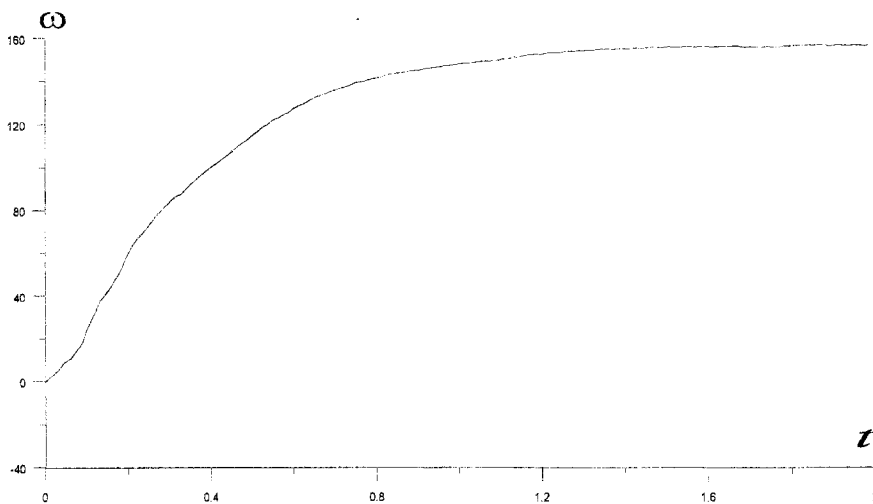


Рис. 8. Швидкість обертання ротора ω

Як видно з результатів, метод дробово-раціональних наближень дозволяє з великою точністю розв'язати задачу електромеханічних коливних процесів багатомасових систем з урахуванням пружності механічних ланок, незважаючи на високу жорсткість конструкції.

1. Слоновьський Р.В., Яремко Т.М. Чисельні методи розв'язання жорстких систем диференціальних рівнянь. Львів, 1990.
2. Чабан В.Й., Марченко Е.В., Козубаш В.И. Алгоритм расчета виброактивности ротора асинхронного двигателя // Электричество.1990. № 1.