СЕКЦІЯ ПРИРОДНИЧИХ НАУК

УДК 534.12

О.М.Горечко, Н.О.Горечко

ВПЛИВ ТЕМПЕРАТУРИ НА ВІБРАЦІЙНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПРЯМОКУТНОЇ ПАНЕЛІ

Розглядається постановка задачі динаміки прямокутних пластин, закріплених у неподатливих опорах, при зміні їх температурного режиму. На прикладі шарнірно опертої пластини, рівномірно підігрітої (охолодженої) після закріплення, показано значний вплив температурних напружень на власні частоти пластини.

Рассматривается постановка задачи динамики прямоугольных пластин, закрепленных в неподатливых опорах, при изменении их температурного режима. На примере шарнирно опертой пластины, равномерно подогретой (охлажденной) после закрепления, показано значительное влияние температурных напряжений на собственные частоты пластины.

Прямокутні панелі є одним з основних несучих елементів конструкцій у найрізноманітніших областях техніки та будівництві. До них часто висуваються вимоги стосовно дії динамічних навантажень. Як правило, це просто вимоги щодо відсутності резонансів, які передаються на панелі безпосередньо або через оточуючі елементи конструкцій від механізмів [4,5]. При неможливості усунення небажаних резонансів іноді вирішують задачі їх демпфування [2,4]. При аналізі поведінки конструкцій під дією ударних навантажень доводиться враховувати для елементів конструкцій широкий спектр резонансних частот та їх параметрів демпфування [2,4]. Чималий інтерес існує і до постановок динамічних задач для тонкостінних елементів конструкції [2–5]. Ряд таких досліджень присвячено розгляду впливу виду кріплення та конструктивного демпфування в ньому на вібраційні характеристики елементів конструкції. Більшість таких задач розв'язана в лінійній постановці.

Значний вплив на вібраційні характеристики має попередній натяг (стиск) панелей у їх площині [3,4]. Такий плоский напружений стан пластини може бути спричинений і температурним режимом пластини, закріпленої в нерухомих опорах. Класичними задачами термопружності для пластин є задачі їх випучування [1], викликаного нерівномірним по товщині пластин температурним полем, або втрати стійкості внаслідок виникнення стискаючих напружень у площині пластини при її нагріванні симетричним по товщині температурним полем. Детальні дослідження зміни динамічних характеристик, які виникають при цьому, наскільки відомо авторам, не проводилися.

У даній роботі розглядається постановка задачі динаміки прямокутної пластини при зміні її температурного режиму, а також на прикладі рівномірного нагрівання пластини, закріпленої на нерухомих шарнірних опорах, досліджується вплив температури пластини на основну частоту її власних коливань.

Якщо в площині прямокутної пластини розміром $a_1 \times a_2$, віднесеної до декартової системи координат x_1Ox_2, діють зусилля N_{11}, N_{12}, N_{22}, то в наближенні Кірхгофа її прогин $w(x_1, x_2, t)$ задовольняє [4] рівняння

$$D\Delta^2 w - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(N_{11}\frac{\partial w}{\partial x_1} + N_{12}\frac{\partial w}{\partial x_2}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(N_{12}\frac{\partial w}{\partial x_1} + N_{22}\frac{\partial w}{\partial x_2}\right), \qquad (1)$$

де $D=\dfrac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ – циліндрична жорсткість пластини; ρ, E, ν, h – відповідно, густина, модуль Юнга, модуль Пуассона та товщина пластини; $\Delta=\dfrac{\partial^2}{\partial x_1{}^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial x_2{}^2}$ – оператор Лапласа.

Розв'язок рівняння (1) шукається в області $0<x_i<a_i$ при заданні початкових умов для прогину $w(x_1,x_2,0)$ та швидкості $\dfrac{\partial w(x_1,x_2,0)}{\partial t}$, а також двох граничних умов на кожній з границь $x_i=0$, $x_i=a_i$.

Зусилля N_{ij}, $(i,j=1,2)$ в площині пластини мають бути попередньо визначені співвідношеннями

$$N_{ij}=\sigma_{ij}h=\frac{hE}{1-\nu^2}\left[\frac{1-\nu}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)+\left(\nu\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)-(1-\nu)\alpha T\right)\delta_{ij}\right] \tag{2}$$

з плоскої незв'язаної задачі статичної термопружності [1], рівняння якої мають вигляд

$$\Delta u_i+\frac{1+\nu}{1-\nu}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)=\frac{2(1+\nu)}{1-\nu}\alpha\frac{\partial T}{\partial x_i}, \tag{3}$$

$$\Delta T+\frac{1}{\lambda_q}Q-\frac{2\alpha_n}{\lambda_q h}T=0.$$

У виразах (2) і (3) прийняті такі позначення: $\bar{u}=(u_1,u_2)$ – вектор переміщень у площині пластини; σ_{ij} $(i,j=1,2)$ – компоненти тензора напружень у пластині; λ_q, α – коефіцієнти теплопровідності та лінійного теплового розширення матеріалу пластини; T – перегрів пластини; Q – потужність джерел тепла в пластині; α_n – коефіцієнт тепловіддачі з поверхні пластини; δ_{ij} – дельта Кронекера. Задача термопружності (3) має бути розв'язана при заданих граничних умовах щодо компонент тензора напружень чи переміщень, а також перегріву. Наприклад,

$$\bar{u}\Big|_{x_i=0}=\bar{u}\Big|_{x_i=a_i}=0,\ T\Big|_{x_i=0}=T\Big|_{x_i=a_i}=T_0.$$

Зауважимо, що при використанні в задачі (3) нестаціонарного рівняння теплопровідності рівняння (1) та (3) доведеться розв'язувати сумісно, тобто отримаємо варіант зв'язаної задачі.

Задача (1) – (3) для прямокутної області навіть для статичної задачі термопружності та гармонійних згинних коливань не має аналітичного розв'язку. Однак для окремих практично важливих випадків розподілу температури та при деяких варіантах опирання пластини задача оцінки її вібраційних характеристик, зокрема, визначення власних частот і форм коливань, розв'язується в замкнутому вигляді.

Для оцінки необхідності врахування теплового режиму пластини при її кріпленні на неподатливих опорах розв'яжемо задачу визначення власних частот пластини при її шарнірному опиранні по краях і рівномірному прогріванні після закріплення на температуру T. У цьому випадку при умові неподатливості кріплень при $x_i=0$ та $x_i=a_i$ вздовж осі Ox_i діє зусилля $N_{ii}=-E\alpha hT$. $N_{12}=0$. Зусилля N_{ij} не залежить від координат, і рівняння (1), яке в гармонійному випадку має вигляд

$$D\Delta^2 w + \rho h \omega^2 w = N_{11}\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^{\ 2}} + N_{22}\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^{\ 2}},$$

де ω – кругова частота гармонійних коливань, і задача знаходження власних частот і форм коливань для нього розв'язуються [4,5] підстановкою сюди відповідних форм коливань абсолютно аналогічно до класичного рівняння коливання ненапруженої пластинки ($N_{ij} = 0$). З нього при шарнірному опиранні прямокутної пластини, тобто при виконанні граничних умов

$$w\big|_{x_i=0} = w\big|_{x_i=a_i} = 0,\ \left.\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_i^{\ 2}} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x_j^{\ 2}}\right)\right|_{x_i=0} = \left.\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_i^{\ 2}} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x_j^{\ 2}}\right)\right|_{x_i=a_i} = 0,\ (i \neq j),$$

на всіх краях пластинки можуть бути отримані вирази для власних частот коливань залежно від перегріву T:

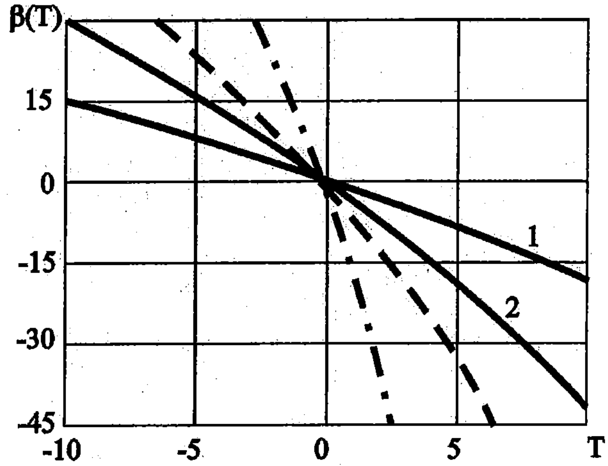
$$\omega_{mn} = \pi^2\sqrt{\frac{D}{\rho h}\left[\left(\frac{m^2}{a_1^{\ 2}} + \frac{n^2}{a_2^{\ 2}}\right)^2 - \frac{12(1-\nu^2)\alpha T}{\pi^2 h^2}\left(\frac{m^2}{a_1^{\ 2}} + \frac{n^2}{a_2^{\ 2}}\right)\right]}, \tag{4}$$

де m і n – число півхвиль власних форм коливань у напрямку осей Ox_1 і Ox_2.

Класичні вирази для власних частот ω_{mn}^0 ненапруженої пластини отримаємо звідси при $\Delta T = 0$. У виразі (4) за зміну частоти внаслідок температурних напружень відповідає остання дужка під коренем. Якщо в ній знехтувати одним з членів – $\frac{m^2}{a_1^{\ 2}}$ або $\frac{n^2}{a_2^{\ 2}}$, то дістанемо вирази для власних частот при неподатливості опор пластинки тільки в одному напрямку. Наприклад, при нехтуванні першим з цих членів одержимо вираз для неподатливих опор тільки при $x_2 = 0$ та $x_2 = a_2$. Дві опори в іншому напрямку вважаються вільними $(N_{11} = 0)$.

Зауважимо, що у випадку шарнірного опирання по двох протилежних сторонах та довільного класичного закріплення по інших сторонах задача визначення власних частот зводиться [4] до числового розв'язування трансцендентного рівняння, що дещо ускладнює її.

Розраховані згідно з (4) графіки залежності процентного відношення $\beta = \frac{\omega_{11} - \omega_{11}^0}{\omega_{11}^0}\cdot 100\%$ зміни основної частоти наведені на рисунку. Тут суцільним кривим відповідають розрахунки для стальної пластини ($E = 2\cdot 10^{11}\,Па$, $\nu = 0{,}3$, $\rho = 7800\frac{кг}{м^3}$, $\alpha = 12\cdot 10^{-6}\,град^{-1}$) з розмірами $a_1 = a_2 = 0{,}1\,м$, $h = 1\,мм$. Крива 1 відображає неподатливість опор лише в одному напрямку (наприклад, опори при $x_2 = 0$ та $x_2 = a_2$, тобто в (4) $N_{11} = 0$), а крива 2 – неподатливість усіх опор. Штриховою кривою зображено аналогічні розрахунки для всіх неподатливих опор при $\frac{a_2}{a_1} = 2$, а штрихпунктирною – для $\frac{a_2}{a_1} = 1$ та $\frac{h}{a_1} = 0{,}005$.



Графіки залежності власної частоти від зміни температури

Як бачимо, із зниженням температури власні частоти зростають. Це й зрозуміло, бо при зниженні температури (охолодженні) пластина опиняється в умовах її додаткового натягу. У той же час зниження власних частот при підвищенні температури не може тривати безмежно. Воно обмежене моментом втрати стійкості стиснутої пластини. Зокрема, для варіантів розрахунків, зображених штриховою та штрихпунктирною кривими, це відбувається, відповідно, при $T \approx 9{,}4$ та $T \approx 3{,}8$. Значення, обчислені із співвідношення (4), стають при цьому чисто уявними.

Цікаво звернути увагу на числові значення деяких величин. Наприклад, при порівняно незначному зростанні (падінні) температури (на 20°С) видовження пластини при податливому кріпленні становило б усього 0,024 мм. Зусилля ж, яке виникає при нерухомому кріпленні, складає 4,8 КН, тобто в пластині виникають напруження 48 МПа, що дорівнює приблизно 10% границі міцності для маловуглецевих сталей. Зміна основної власної частоти при цьому становить, як видно з графіків, кілька десятків відсотків.

Таким чином, при конструюванні обладнання, що експлуатується у змінюваних температурних умовах і важливою характеристикою якого є динамічні властивості плоских тонкостінних елементів конструкцій, необхідно враховувати описаний у даній роботі ефект конструктивної термочутливості або уникати його шляхом використання податливих кріплень чи матеріалів з близькими коефіцієнтами лінійного теплового розширення.

1. Коваленко А.Д. Термоупругость. К., 1975. 2. Нашиф А., Джоунс Д., Хендерсон Дж. Демпфирование колебаний. М., 1988. 3. Прочность, устойчивость, колебания: Справочник в 3 т./ Под ред. И.А. Биргера, Я.Г. Пановко. Т.3. М., 1968. 4. Токарев М.Ф., Талицкий Е.Н., Фролов В.А. Механические воздействия и защита радиоэлектронной аппаратуры: Учеб. пособие для вузов/ Под ред. В.А. Фролова. М., 1984. 5. Филиппов А.П. Колебания деформируемых систем. М., 1970.

УДК 512.64: 519.61

Р.В.Коляда, О.М.Мельник, В.М.Прокіп

ПРО ФАКТОРИЗАЦІЮ БАГАТОЧЛЕННИХ МАТРИЦЬ НАД ПОЛЕМ НУЛЬОВОЇ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Досліджуються умови існування унітального дільника із заданим визначником з багаточленної матриці над полем нульової характеристики.

Исследуются условия существования унитального делителя из заданным определителем из многочленной матрицы над полем нулевой характеристики.

Нехай **P** – поле характеристики нуль, а $\mathbf{P}_n$ і $\mathbf{P}_n[x]$ – відповідно, кільця матриць порядку $n \geq 2$ над полем **P** та кільцем багаточленів **P**[x]. Нижче використовуватимемо такі позначення: **I**