муємо, що для матриці **A**(x) існує факторизація **A**(x) = **B**(x)·**C**(x), де **B**(x) – унітальна багаточленна матриця степеня r і det**B**(x) = b(x) = $(x-b_1)^{k_1}(x-b_2)^{k_2}...(x-b_m)^{k_m}$, причому **B**(x) однозначно визначена своїм визначником b(x). Теорему доведено.

Наслідок. Нехай **A**(x) ∈ $\mathbf{P}_n[x]$, така, що rank**A**(x) = n – 1 і $d_A(x) = 1$. Нехай далі b(x) = $(x-b_1)^{k_1}(x-b_2)^{k_2}...(x-b_m)^{k_m} \in \mathbf{P}[x]$ – унітальний багаточлен степеня nr, причому deg**A**(x) ≥ (n – 1)·r. Для матриці **A**(x) існує факторизація **A**(x) = **B**(x)·**C**(x), де **B**(x) ∈ $\mathbf{P}_n[x]$ – унітальна багаточленна матриця степеня r і det**B**(x) = b(x), тоді і тільки тоді, коли rank $\mathbf{M}[\mathbf{A}_{r+1}, b]$ = nr. Якщо ж шуканий дільник **B**(x) існує, то він єдиний із заданим b(x).

Зазначимо, що отримані результати мають безпосереднє застосування при дослідженні розв'язності матричних багаточленних рівнянь чи систем матричних рівнянь, оскільки відшукання їхніх розв'язків рівносильне виділенню з багаточленної матриці лінійного [1] чи степеня r [6] унітального дільника. Крім того, наведені результати можна використати в теорії систем диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами.

1. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М., 1988. 2. Казімірський П.С. Розклад матричних многочленів на множники. К., 1981. 3. Казимирский П.С., Петричкович В.М. Разложимость полиномиальных матриц на линейные множители // Матем. методы и физ.-мех. поля. 1978. Вып. 8. 4. Коляда Р.В., Мельник О.М. Факторизація однорідних многочленних матриць від двох змінних //Сучасні проблеми математики: Матеріали міжнар. наук. конф. Ч. 1. К., 1998. 5. Малышев А.Н. Гарантированная точность в спектральных задачах линейной алгебры // Вычислительные методы линейной алгебры. Тр. Ин-та математики СО АН СССР. Т.17. Новосибирск, 1990. 6. Мельник О.М. Дослідження однієї системи матричних рівнянь //Доповіді АН УРСР. Сер. А. 1981. 7. Прокіп В., Мельник О., Кузаконь В. Про один клас дільників багаточленних матриць над полем // Вісник Львівського університету. Серія прикладної математики та інформатики. Вип. 5. Львів, 2002.

УДК 517.956

У. В. Жидик

РОЗВ'ЯЗОК КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ПІВЛІНІЙНОГО ЕЛІПТИЧНОГО РІВНЯННЯ ПОРЯДКУ $2m$ У КЛАСІ ФУНКЦІЙ З ОСОБЛИВОСТЯМИ НА МЕЖІ ОБЛАСТІ

Доводяться достатні умови, при яких регулярний у середині області розв'язок півлінійного еліптичного рівняння порядку $2m$ на межі області набуває узагальнених значень з $D'(S)$.

Доказываются достаточные условия, при которых регулярное внутри области решение полулинейного эллиптического уравнения порядка $2m$ на границе области принимает обобщенные значения из $D'(S)$.

Нехай Ω – область в R^n, обмежена замкненою поверхнею S класу C^∞, $D(\overline{\Omega}) = C^\infty(\overline{\Omega}), D(S) = C^\infty(S), D'(\overline{\Omega}), D'(S)$ – простори лінійних неперервних функціоналів відповідно на $D(\overline{\Omega})$ і $D(S)$.

Нехай $x_0 \in S$, $\rho(x)$ – невід'ємна нескінченно диференційовна в $\overline{\Omega}$ функція, яка дорівнює нулю в точках поверхні S, біля S має порядок відстані $d(x,S)$ від точки $x \in \Omega$ до поверхні S, $\rho(x) \le \rho_1, x \in \Omega$, $\rho(x,x_0)$ – невід'ємна нескінченно диференційовна в $\overline{\Omega}$ функція, $\rho(x_0,x_0) = 0$, а в околі точки x_0 має порядок $d(x,x_0) = |x - x_0|, x_0 \in \overline{\Omega}$.

Уведемо функціональні простори:

$$\tilde{m}_p(\Omega) = \{u : u \in C^{2m-1}(\Omega) : \|u\|_p = \int_\Omega \sum_{|\gamma| \le 2m-1} \rho^{p+\gamma}(x)\left|D^\gamma u(x)\right| dx < +\infty\},$$

$\tilde{m}_{p,C}(\Omega)=\left\{u\in\tilde{m}_p(\Omega):\|u\|_p\le C\right\}$, для довільних $x_0\in S$ та мультиіндексу γ $\Big\}$, $p\ge 0$,

$Z_p(S)=\{\varphi\in C^\infty(S):\left|D^\gamma\varphi(x)\right|\le\left(\rho^{p-|\gamma|}(x,x_0)+1\right)h_\gamma(x)$, $h_\gamma\in C(S)$, для довільних $x_0\in S$, мультиіндексу γ $\}$, $p\ge 0$. $\tilde{Z}_p(\overline{\Omega})=\left\{\varphi\in C^\infty(\overline{\Omega}):\rho^{|\gamma|}(x)\right|D^\gamma\varphi(x)|\le\rho^p(x)h_\gamma(x),h_\gamma\in C(\overline{\Omega})$, для довільного мультиіндексу γ $\Big\}$. $Z_p(\overline{\Omega})=\{\varphi\in C^\infty(\overline{\Omega}):\left|D^\gamma\varphi(x)\right|\le\left(\rho^{p-|\gamma|}(x)+1\right)h_\gamma(x)$, $h_\gamma\in C(\overline{\Omega})$ для довільного мультиіндексу γ $\}$.

Нехай $A(x,D)$ – лінійний диференціальний еліптичний оператор порядку $2m<n$, $\left\{B_j\left(x,\frac{\partial}{\partial x}\right)\right\}_{j=1}^m$ – нормальна система крайових диференціальних операторів, яка накриває оператор $A(x,D)$, коефіцієнти операторів вважаємо нескінченно диференційовними.

Нехай A^* – оператор, формально спряжений до A, $\{T_j\}_{j=1}^m$ – довільна система диференціальних операторів порядку μ_j $\left(\mu_j\le 2m-1\right)$ з коефіцієнтами з $D(S)$, яка доповнює систему $\tilde{Z}_p(S)=\left\{\varphi\in C^\infty(S):\rho^{|\gamma|}(x,x_0)\right|D^\gamma\varphi(x)|\le\rho^p(x,x_0)h_\gamma(x),h_\gamma\in C(S)$, $\{B_j\}_{j=1}^m$ до системи Діріхле порядку $2m$. Тоді існує [4] $2m$ крайових диференціальних операторів $\hat{B}_j$ і $\hat{T}_j$ $\left(j=\overline{1,m}\right)$, що однозначно визначаються операторами B_j і T_j $\left(j=\overline{1,m}\right)$ і мають такі властивості: порядок оператора $\hat{B}_j$ дорівнює $2m-1-\mu_j$, а порядок $\hat{T}_j$ – $2m-1-m_j$; система $\left\{\hat{B}_j,\hat{T}_j\right\}_{j=1}^m$ утворює на S систему Діріхле порядку $2m$; правильна формула Гріна $\int\limits_\Omega\left(Auv-uA^*v\right)dx=\sum\limits_{j=1}^m\int\limits_S\left(T_ju\,\hat{B}_j\,v-B_ju\,\hat{T}_j\,v\right)dS$, $u,v\in D(\overline{\Omega})$.

Нехай функція $f\left(x,u,D^\alpha u\right)$ визначена для $x\in\Omega$, $u,D^\alpha u\in(-\infty;+\infty),|\alpha|\le 2m-1$, неперервна та диференційовна за u, $D^\alpha u$, $F_j\in D'(S),j=\overline{1,m}$;

$$Y_k(\overline{\Omega})=\left\{\varphi\in D(\overline{\Omega}):\hat{B}_j\,\varphi\big|_S=0,\ j=\overline{1,m},\ A^*\varphi(x)=O\left(\rho^k(x)\right)\ \text{біля}\ S\right\},\ k\ge 0.$$

Розглянемо узагальнену крайову задачу

$$A(x,D)u(x)=f\left(x,u(x),D^\alpha u(x)\right),\ x\in\Omega\ ,|\alpha|\le 2m-1, \tag{1}$$

$$B_j(x,D)u(x)\big|_{x\in S}=F_j\ ,\ j=\overline{1,m},\ x\in S \tag{2}$$

у наступному формулюванні, припускаючи, що ядро відповідної лінійної однорідної задачі $N=\{0\}$.

Формулювання узагальненої крайової задачі. Знайти функцію $u\in\tilde{m}_k(\Omega)$, яка задовольняє тотожність

$$\int\limits_\Omega A^*\psi(x)u(x)dx=\int\limits_\Omega\psi(x)F_0(x,u)dx+\sum_{j=1}^m\langle\hat{T}_j\,\psi(x),F_j\rangle,\quad\psi\in Y_k(\overline{\Omega}). \tag{3}$$

Позначимо через $G(x,y)=\left(G_0(x,y),G_1(x,y),..,G_m(x,y)\right)$ вектор-функцію Гріна задачі (1),(2) [3]. Вона визначена для $x\in\overline{\Omega},y\in\Omega$ при $j=0$ і $y\in S$ при $j=\overline{1,m}$ і єдина. Подібно до [2], доводимо, що задача (1), (2) еквівалентна інтегро-диференціальному рівнянню

$$u(x)-\int\limits_\Omega G_0(x,y)f\left(y,u(y),D^\alpha u(y)\right)dy=\sum_{j=1}^m\langle G_j(x,y),F_j(y)\rangle,x\in\Omega,u\in\tilde{m}_p(\Omega). \tag{4}$$

Для доведення існування його розв'язку використовуємо результати роботи [5] та наступну лему :

Лема . Для довільної функції $\varphi \in \widetilde{Z}_k(\overline{\Omega})$

$$\hat{G}_0 \varphi = \int_{\Omega} \varphi(x) G_0(x,\bullet) dx \in Z_{k+2m-n+1}(\overline{\Omega}), k \ge -n,$$

$$\hat{G}_j \varphi = \int_{\Omega} \varphi(x) G_j(x,\bullet) dx \in Z_{k+m_j-n+1}(\overline{\Omega}), k \ge 2m-1-m_j, j = \overline{1,m}.$$

Ця лема доводиться подібно до леми 3 з [2].

З оцінок вектор-функції Гріна та її похідних випливає, що $G(\bullet, y) \in Z_{2m-n}(\overline{\Omega})$ для довільного $y \in \overline{\Omega}$. Використовуючи результати роботи [5], при $p = 2m - n$ з урахуванням леми доводимо таке твердження.

Теорема 1. Нехай $k \ge n - 2m$, $z \in R^M$ (M – певне натуральне число), для $x \in \Omega, u \in (-\infty; +\infty)$, $z_i \in (-\infty; +\infty)$, $i = \overline{1,M}$, визначені $f(y,u,z)$, $f'_u(y,u,z)$, $f'_{z_i}(y,u,z)$, $i = \overline{1,M}$, $f(y,u,z)$ – неперервна, існують такі додатні сталі $C_0, C_1, C_1', C_2, \widetilde{C}_\alpha, |\alpha| \le 2m-1$, що $g \in \widetilde{m}_{k,C_1}(\overline{\Omega})$, $g_{x_j} \in \widetilde{m}_{k-1,C_1'}(\overline{\Omega})$, $j = \overline{1,n}$, для довільної сталої $C > \max(C_0, 2C_1)$

$$\int_{\Omega} \left| f(y,u,D^\alpha u) \right| dy \le C_2, \; u \in \widetilde{m}_{k,C}(\overline{\Omega}), \tag{5}$$

причому $2 \sum_{|\gamma| \le 2m-1} L_\gamma \rho_1^{k+|\gamma|} C_2 < C_0$, де $\rho_1 = \max_{x \in \Omega} \rho(x)$, $L_\gamma = \max_{y \in \Omega} \int_{\Omega} \left| D_x^\gamma G_0(x,y) \right| dx$,

$$\left| f'_u(y,u(y),D^\alpha u(y)) \right| \le C_0 \rho^k(y), \; y \in \overline{\Omega}, \; u \in \widetilde{m}_{k,C}(\overline{\Omega}), \tag{6}$$

$$\left| f'_{D^\alpha u}(y,u,D^\alpha u) \right| \le \widetilde{C}_\alpha \rho^{k+|\alpha|}(y), \; y \in \overline{\Omega}, \; |\alpha| \le 2m-n, \; u \in \widetilde{m}_{k,C}(\overline{\Omega}). \tag{7}$$

Існує розв'язок $u \in \widetilde{m}_{k,C}(\overline{\Omega})$ рівняння

$$u(x) - \int_{\Omega} G_0(x,y) f(y,u(y),D^\alpha u(y)) = g(x), \; x \in \Omega. \tag{8}$$

Для доведення використовуємо теорему Шаудера [6, с. 291].

Вводимо оператор H:

$$(Hu)(x) = \int_{\Omega} G_0(x,y) f(y,u(y),D^\alpha u(y)) dy + g(x), \; x \in \Omega, \; u \in \widetilde{m}_k(\overline{\Omega}).$$

Для доведення відносної компактності множини функцій $\{ Hu : u \in \widetilde{m}_{k,C}(\overline{\Omega}) \}$ в $\widetilde{m}_k(\overline{\Omega})$ використовуємо теореми Ріса [6, с. 242] й Арцела. Оскільки $\rho^{k+|\gamma|} D_x^\gamma u \in L_1(\Omega)$ при $u \in \widetilde{m}_k(\overline{\Omega})$ для довільного γ, $|\gamma| \le 2m-1$, $u \in C^{2m-1}(\overline{\Omega}_\varepsilon)$, для довільного $\varepsilon > 0$, то достатньо перевірити виконання умов:

1) існує така стала $C' > 0$, що $\| Hu \|_{\widetilde{m}_k(\overline{\Omega})} \le C'$, при $u \in \widetilde{m}_{k,C}(\overline{\Omega})$;

2) для довільного $\eta > 0$ існує таке $\delta = \delta(\eta) > 0$, що для довільних $z \in \Omega$, $|z| \le \delta$, $|\gamma| \le 2m-1$, $u \in \widetilde{m}_{k,C}(\overline{\Omega})$

$$\int_{\Omega} \left| \rho^{k+|\gamma|}(x+z) D_x^\gamma((Hu)(x+z)) - \rho^{k+|\gamma|}(x) D_x^\gamma((Hu)(x)) \right| dx \le \eta; \tag{9}$$

3) множина функцій $\{ D^\gamma(Hu), \; u \in \widetilde{m}_{k,C}(\overline{\Omega}) \}$ є рівномірно обмеженою та одностайно неперервною в $\overline{\Omega}_\varepsilon$ при $|\gamma| \le 2m-1$ та довільному $\varepsilon > 0$.

Також показуємо, що якщо правильні оцінки (6) та (7), то $\| Hu_1 - Hu_2 \|_k \le C_3 \| u_1 - u_2 \|_k$, $u_1, u_2 \in \tilde{m}_{k,C}(\overline{\Omega})$, тобто оператор H неперервно відображає $\tilde{m}_{k,C}(\overline{\Omega})$ в себе для довільної сталої $C > \max(C_0, 2C_1)$. Дана теорема доведена на підставі теореми Шаудера.

Нехай тепер $g(x) = \sum_{j=1}^{m} < G_j(x,y), F_j(y) >$. За властивостями функції Гріна $g \in C^\infty(\Omega)$. Узагальнені функції F_j мають скінченні порядки сингулярності $s(F_j) \le p_j$ [1, с. 81], $p_j \ge 0$, $j = \overline{1,m}$. За лемою Шварца існує така стала $L > 0$, що $\left| < \varphi, F_j > \right| \le L \sum_{|\alpha| \le p_j} \max_{y \in S} \left| D^\alpha \varphi(y) \right|$, $\varphi \in D(S)$..

$$\left| \int_\Omega \rho^k(x) D^\gamma g(x)\,dx \right| = \left| \sum_{j=1}^{m} \int_\Omega \rho^k(x) < D_x^\gamma G_j(x,y), F_j > dx \right| = \left| \sum_{j=1}^{m} < \int_\Omega \rho^k(x) D_x^\gamma G_j(x,y)\,dx, F_j > \right| \le$$

$$\le L \sum_{|\alpha| \le p_j} \max_{y \in S} \left| D_y^\alpha \int_\Omega \rho^k(x) D_x^\gamma\, G_j(x,y)\,dx \right|.$$ За лемою при $k \ge 2m - m_j - 1$, $j = \overline{1,m}$

$$\left| D_y^\alpha \int_\Omega \rho^k(x) G_j(x,y)\,dx \right| \le \hat{\bar{C}}_j \left(\left| y - \hat{y} \right|^{k + m_j + 1 - n - |\alpha|} + 1 \right),\ y,\ \hat{y} \in S.$$

З попередньої оцінки одержуємо $\| g \| \le l_1$, де $l_1 = const > 0$, якщо $k + m_j - n + 1 - |\alpha| \ge 0$, при всіх α, $|\alpha| \le p_j$, та $k \ge 2m - 1 - m_j$, тобто $k \ge \max\left(\max_{1 \le j \le m} (p_j - m_j + n - 1), \max_{1 \le j \le m} (2m - 1 - m_j) \right) = \max_{1 \le j \le m} (p_j - m_j + n - 1)$, при $p_j \ge 0$ та $n > 2m$. Тому $g \in \tilde{m}_k(\overline{\Omega})$ при $k \ge \max_{1 \le j \le m} (p_j - m_j + n - 1)$, $g_{x_i} \in \tilde{m}_{k-1}(\overline{\Omega})$ при $k \ge \max_{1 \le j \le m} (p_j - m_j + n)$, $i = \overline{1,n}$.

Теорема 2. Нехай $F_j \in D'(S)$, $s(F_j) \le p_j$, $p_j \ge 0$, $j = \overline{1,m}$, $k \ge \max_{1 \le j \le m} (n + p_j - m_j)$,

$$C_1 = \max_{\rho \le \rho_1} \sum_{|\gamma| \le 2m-1} \sum_{j=1}^{m} \int_\Omega \rho^{k+|\gamma|}(x) \left| \langle D_x^\alpha G_j(x,y), F_j(y) \rangle \right| dx,\ C > \max(C_0, 2C_1).$$

функція f задовольняє умови теореми 1, тоді існує розв'язок $u \in \tilde{m}_{k,C}(\overline{\Omega})$ задачі (1), (2) у вищенаведеному формулюванні.

1. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. Изд. 4-е. М., 1981. 2. Жидик У.В., Лопушанська Г.П. Про узагальнені граничні значення розв'язків квазілінійного еліптичного рівняння другого порядку // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 2001. Вип.59. С. 144–156. 3. Красовский Ю.П. Свойства функций Грина и обобщенное решение эллиптических граничных задач // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1969. Т.33, №1. С. 109–137. 4. Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. М., 1971. 5. Лопушанська Г.П. Розв'язки узагальнених еліптичних граничних задач із сильними степеневими особливостями // Мат. студії. 1998. Т.9, №1. С. 29–41. 6. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Элементы функционального анализа. М., 1965.