

УДК 681.5.017+62-13

І.М. Луцкіє

МОДЕЛЮВАННЯ СТРІЧКОПРОВІДНОЇ ДІЛЯНКИ МЕТОДОМ ІНТЕГРУВАННЯ ПРИРОСТУ ШВИДКОСТІ СТРІЧКИ НА ІНТЕРВАЛІ ЧАСУ

Розв'язано задачу побудови математичної моделі видовження та натягу стрічки шляхом інтегрування приросту швидкості на інтервалі часу проходження її на ділянці. Наведено результати комп'ютерного моделювання.

Решена задача построения математической модели удлинения и натяжения ленты путем интегрирования прироста скорости на интервале времени прохождения её на участке. Приведены результаты компьютерного моделирования.

Принцип неперервного проведення стрічкопровідного матеріалу через ряд технологічних операцій, що виконуються на стрічці, є найбільш досконалим у побудові машин у різних галузях промисловості: металургійній, хімічній, переробній, текстильній, поліграфічній та інших [2,4,6].

Ротаційні машини складаються з окремих секцій, які приводяться в рух від головного двигуна або можуть мати індивідуальний електропривод окремих секцій. Разом з тим, вони є складними електромеханічними системами. Вимагають складних систем керування електроприводом машин, систем автоматичного регулювання натягу стрічкового матеріалу тощо [2,3,4,6].

За останнє десятиріччя збільшилися робочі швидкості ротаційних машин і підвищилися вимоги до якості готової продукції. Наприклад, швидкість сучасних рулонних ротаційних друкарських машин становить 10÷15 м/с, а потрібна точність суміщення фарб – 0,1±0,05 мм і менше [2,5]. Виникла проблема забезпечення не тільки синхронного, але й синфазного руху стрічкового матеріалу і робочих та виконавчих механізмів стрічкопровідних систем. Це вимагає створення ефективних систем автоматичного керування стрічкопровідними системами нових ротаційних машин та оптимального налагодження існуючих систем керування, що є можливим при наявності адекватних моделей стрічкопровідних систем. Існуючі моделі стрічкопровідних систем побудовані при певних припущеннях, тому не в повній мірі описують стрічкопровідну систему, що обмежує їх функціональні можливості.

Відсутність адекватних моделей стрічкопровідних систем ротаційних машин унеможливає розроблення ефективних систем автоматичного керування ними та оптимальне налагодження існуючих систем, що призводить до зменшення робочої швидкості машин і погіршення якості готової продукції. Особливо це стосується машин, в яких потрібно забезпечити синфазний рух.

З викладеного доходимо висновку, що на часі актуальна проблема розроблення більш повних математичних моделей стрічкопровідних систем, які б адекватно описували їх як об'єкт регулювання. Виникає задача обґрунтування і розвитку нових підходів до моделювання стрічкопровідних систем, які були б зручні для комп'ютерного симулювання.

Розроблення математичних моделей стрічкопровідних систем – складна задача, яка вимагає системного підходу. Розробку нових моделей стрічкопровідних систем потрібно починати з математичної моделі стрічкопровідної ділянки рухомої стрічки, яка є базовою моделлю. На підставі її будуються більш складні моделі стрічкопровідних систем ротаційних машин у різних галузях. Від адекватності і повноти опису видовження й натягу стрічки на ділянці залежить адекватність більш складних моделей стрічкопровідних систем ротаційних машин.

Відомі різні підходи до підвищення точності існуючих моделей стрічкопровідних систем – шляхом врахування: відносного видовження стрічки на попередній ділянці [1,6], нелінійної залежності між відносним видовженням стрічки на ділянці та її натягом [5,7,8], повзучості стрічки [5]. Ці підходи не можуть якісно вплинути на існуючу вихідну модель ділянки стрічки.

Вони або уточнюють коефіцієнти диференціального рівняння або враховують дію тих чи інших зовнішніх збурень. З точки зору теорії автоматичного керування суттєво не впливають на об'єкт регулювання і синтез самої системи керування.

Звернемо увагу на те, що в публікаціях, де виведено базове диференціальне рівняння видовження рухомої стрічки на ділянці [3,4,7] та ін., не всі положення і припущення належним чином обґрунтовано або прийнято як постулати без пояснень. Враховуючи важливість цих положень, викладемо і проаналізуємо основні припущення при складанні базового диференціального рівняння натягу.

Припущення 1. Відносно видовження рухомої стрічки на ділянці, викликане приростом її швидкості, тотожне відносній зміні видовження стрічки на ділянці. В окремих публікаціях [2,4] це припущення подано в уявній аналітичній формі запису:

$$\varepsilon_v = \frac{\Delta L}{L_0} = \frac{V_2 - V_1}{V_1} = \frac{\Delta V_2}{V_1}, \quad (1)$$

де L_0 – довжина ділянки стрічки; ΔL – абсолютне видовження стрічки на ділянці; V_1, V_2 – лінійні швидкості стрічкопровідних пар циліндрів при умові $V_2 > V_1$.

Значимо, що в публікаціях це припущення не обґрунтовується, а приймається без будь яких пояснень.

Припущення 2. Видовження (деформація) рухомої стрічки є лінійною і відповідає закону Гука [2,4,5,6].

Дане припущення не подано в явній аналітичній формі, тому його важко аналізувати. Звернемо увагу на те, що для стрічкових матеріалів закон Гука відповідає статичним умовам видовження нерухомої стрічки заданої довжини під дією навантаження, а видовження стрічки на ділянці відбувається в рухомому стані.

Отже, умови видовження стрічки різні. У першому випадку маємо статичні умови видовження, обумовлені дією статичного навантаження, а в другому – динамічні, викликані приростом швидкості стрічки на ділянці. На вхід ділянки неперервно надходить недеформована стрічка (або яка має задану початкову деформацію); відбувається неперервне заміщення видовженої стрічки невидовженою.

Ділянка стрічки є інерційним об'єктом, тому маємо всі підстави стверджувати, що при наявності приросту швидкості видовження стрічки на ділянці відбувається поступово й за час проходження між стрічкопровідними парами циліндрів процес не досягає усталеного видовження стрічки і знаходиться в квазістационарному режимі. Тому перше припущення і співвідношення (1) є некоректними (неповними). Доведемо це твердження. Для цього розглянемо схему стрічкопровідної ділянки (рис.1). Припустимо, що стрічка, яка потрапляє на вхід ділянки, ненатягнута, але й не провисає, а стрічкопровідні пари циліндрів рухаються з однаковою лінійною швидкістю.

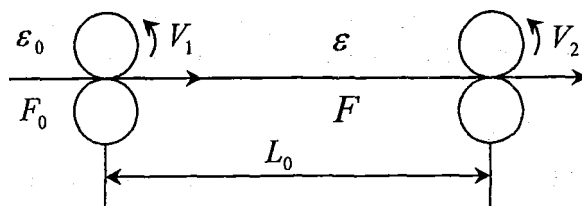


Рис.1. Схема стрічкопровідної ділянки

Нехай у деякий момент часу швидкість другої пари миттєво стрибком змінюється на величину ΔV_2 . Приріст швидкості викличе приріст видовження стрічки, який для малого часу наближено можна подати так [3,5]:

$$\Delta l = \Delta V_2 \Delta t. \quad (2)$$

Відповідне відносне видовження стрічки

$$\varepsilon = \frac{\Delta V_2 \Delta t}{L_0 + V_1 \Delta t}, \quad (3)$$

де L_0 – відстань між стрічкопровідними парами.

Для прикладу за цим виразом визначимо відносне видовження стрічки на ділянці для часу $\Delta t_1 = T_0 / 2$ і $\Delta t_2 = T_0$ при умові, що $L_0 = V_1 T_0$, де T_0 – час проходження стрічки між першою і другою стрічкопровідними парами:

$$\varepsilon(\Delta t_1) = \frac{1}{3} \frac{\Delta V_2}{V_1}; \quad \varepsilon(\Delta t_2) = \frac{1}{2} \frac{\Delta V_2}{V_1}.$$

Розділивши праву частину виразу (3) на час Δt , подамо його як

$$\varepsilon = \frac{\Delta V_2}{L_0 / \Delta t + V_1}. \quad (4)$$

Звідси бачимо, що коли час прямує до нескінченності, то відносне видовження стрічки – до усталеного режиму. Звернемо увагу на те, що при цьому переміщення стрічки $\Delta L = V_1 \Delta t$ прямує до безмежності, що не відповідає суті явища, а вираз (3) є наближеним і справедливим для малих відрізків часу $\Delta t \leq T_0$.

Отже, доведено, що відносне видовження стрічки на ділянці, викликане приростом її швидкості в перехідних режимах, не дорівнює відносній зміні швидкості $\Delta V_2 / V_1$, тому припущення 1 і вираз (2), що відповідає йому для перехідних режимів, є некоректним. Навіть за час проходження стрічки на ділянці $\Delta t = T_0$ відносне видовження її складає тільки половину відносної зміни швидкості. А для малих відрізків часу воно буде ще меншим.

На підставі проведеного наближеного аналізу робимо висновок, що існуюче базове диференціальне рівняння видовження стрічки є неповним. Тому моделі стрічкопровідних систем, побудовані на його основі, не в повній мірі описують їх, тому мають обмежені функціональні можливості.

Побудова математичної моделі стрічкопровідної ділянки методом інтегрування приросту швидкості стрічки на інтервалі часу

При побудові математичної моделі стрічкопровідної ділянки приймаємо такі основні припущення:

швидкість другої стрічкопровідної пари циліндрів більша за швидкість першої;
відсутнє проковзування стрічкового матеріалу в зонах контакту ведучих пар циліндрів;
розтяг матеріалу відбувається в межах пружних деформацій, які є лінійними.

Зв'язок між абсолютним видовженням стрічки на ділянці (рис.1) і швидкостями стрічкопровідних пар циліндрів описується відомим диференціальним рівнянням деформації [2,4,6], яке для прозорого й послідовного викладу запишемо в абсолютних одиницях і подамо у вигляді

$$T_0 \frac{d\Delta L}{dt} + \Delta L = \Delta L_0 + \Delta L_V, \quad (5)$$

де ΔL_0 , ΔL – абсолютне видовження стрічки на вході та виході ділянки; ΔL_V – видовження стрічки, викликане приростом лінійної швидкості другої стрічкопровідної пари циліндрів; $T_0 = L_0 / V_2$ – час, за який стрічка проходить шлях між двома стрічкопровідними парами циліндрів.

Припускаємо, що спочатку швидкості обох стрічкопровідних пар рівні і в деякий момент часу швидкість другої пари одержала приріст ΔV_2 . Це викличе приріст видовження стрічки, який для малих приростів часу можна подати так [3,5]:

$$\Delta L_V = (V_2 - V_1 + \Delta V_2) \Delta t. \quad (6)$$

Розділивши цей вираз на Δt і прийшовши до границі при $\Delta t \rightarrow 0$, отримаємо диференціальне рівняння

$$\frac{d\Delta L_V}{dt} = V_2 - V_1 + \Delta V_2. \quad (7)$$

Це є рівняння видовження стрічки, подане в приростах при умові, що перша стрічкопровідна пара не має приросту швидкості, а значить не враховує заміщення деформованої стрічки на ділянці недеформованою. Тоді на підставі залежності (7) видовження стрічки в кінці ділянки можна одержати, проінтегрувавши приріст швидкості на кінцевому інтервалі часу $[0, T_0]$:

$$\Delta L_V = \int_0^{T_0} (V_2 - V_1 + \Delta V_2) dt. \quad (8)$$

Після підстановки виразу (8) у вираз (5) одержимо диференціальне рівняння видовження рухомої стрічки на ділянці з урахуванням заміщення деформованої стрічки:

$$T_0 \frac{d\Delta L_V}{dt} + \Delta L = \Delta L_0 + \int_0^{T_0} (V_2 - V_1 + \Delta V_2) dt. \quad (9)$$

Отже, права частина цього рівняння значно відрізняється від відомого рівняння (5).

Перейдемо до операторної форми запису диференціального рівняння, що полегшить подальші викладення. Для цього ΔL замінимо на l і запишемо рівняння в операторному вигляді:

$$T_0 l(s) + l(s) = l_0(s) + \frac{1 - e^{-T_0 s}}{s} [V_2(s) - V_1(s) + \Delta V_2(s)]. \quad (10)$$

Змінні $V_i(s)$ та $l_i(s)$ є зображенням відповідних змінних, а вираз $\frac{1 - e^{-T_0 s}}{s}$ відповідає операції інтегрування на інтервалі часу $[0, T_0]$. Поділивши цей вираз на L_0 , одержимо рівняння відносного видовження рухомої стрічки на ділянці:

$$T_0 \frac{d\varepsilon}{dt} + \varepsilon = \varepsilon_0 + \int_0^{T_0} \frac{\Delta V_2}{L_0} dt, \quad (11)$$

де ε_0 і ε – відносне видовження стрічки на вході та виході ділянки.

За диференціальним рівнянням (11) побудована структурна схема моделі відносного видовження рухомої стрічки на ділянці (рис.2). Ця схема наглядна і зручна для комп'ютерного симулювання.

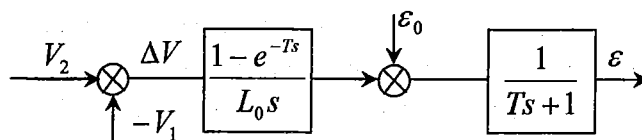


Рис.2. Структурна схема моделі відносного видовження рухомої стрічки на ділянці

Натяг стрічки на ділянці можна визначити через її відносне видовження на основі відомої залежності [2,7,8]

$$F = E_m f \varepsilon = E_c \varepsilon. \quad (12)$$

Тут E_c – модуль пружності стрічки, приведений до її поперечного перетину; f – площа поперечного перетину стрічки; E_m – модуль пружності матеріалу стрічки.

На підставі рівняння видовження (9) з урахуванням залежності (12) одержимо диференціальне рівняння натягу стрічки на ділянці:

$$T \frac{dF}{dt} + F = F_0 + \frac{E_c}{L_0} \int_0^T (V_2 - V_1 + \Delta V_2) dt. \quad (13)$$

Якщо приріст швидкості подати у відносних одиницях $\nu = \Delta V_2 / V_1$ і врахувати, що $L_0 = V_1 T$, то одержимо рівняння натягу стрічки для відносної зміни приросту швидкості:

$$T \frac{dF}{dt} + F = F_0 + \frac{E_c}{T} \int_0^T \nu dt \quad (14)$$

Для зручності аналізу подамо операторну форму запису диференціального рівняння натягу:

$$TF(s)s + F(s) = F_0(s) + \frac{[1 - e^{-T_0 s}]}{L_0 s} E_c [V_2(s) - V_1(s) + \Delta V_2(s)]. \quad (15)$$

Права частина цього рівняння є досить прозорою і має чіткий фізичний зміст. Натяг стрічки визначається через прямі фізичні параметри ділянки стрічки: модуль пружності стрічки, довжина ділянки стрічки, час проходження стрічки між стрічкопровідними парами.

Натомість, у відомому диференціальному рівнянні натягу [2,3,4] натяг стрічки визначається з використанням коефіцієнта передачі ділянки за швидкістю $k_v = \Delta F / \Delta V$. При його визначенні зустрічаються певні труднощі, тому його приймають наближено на підставі практичного досвіду і експериментальних досліджень у межах $[1000 < k_v < 5000]$ кг/м/с [2]. Це є джерелом значної похибки при розрахунках натягу.

Зазначимо, що стрічкопровідна ділянка відноситься до об'єктів регулювання зі змінними параметрами, які залежать від швидкості роботи машин, тому виникають певні труднощі щодо керування стрічкопровідними системами.

Аналітичне дослідження динаміки рухомої стрічки на ділянці шляхом розв'язування диференціального рівняння трудомістке і неможливе. Тому для аналізу використано комп'ютерне симулювання, широко розповсюджене у популярному середовищі MATLAB-Simulink [1]. На підставі рівнянь (2, 10) і структурної схеми (рис.2) за допомогою графічного редактора MATLAB-Simulink у вікні моделі побудовано графічну модель абсолютного видовження рухомої стрічки на ділянці.

Метою комп'ютерного симулювання були побудова перехідної характеристики ділянки стрічки та аналіз динаміки видовження. При симулюванні задавали час проходження стрічки між стрічкопровідними парами $T_0 = 1$ с. На рис.3 наведено графіки перехідної характеристики (крива 2) при подачі на вході одиничного ступеневого приросту швидкості. Крива 1 характеризує зміни в часі абсолютного видовження стрічки l_v без врахування процесу заміщення деформованої стрічки на ділянці. Спочатку видовження лінійно наростає, а в кінці ділянки після часу T_0 обмежується до рівня $l_v = 1$ і далі не збільшується. Це відповідає фізичній суті. Якщо б видовження стрічки на ділянці неперервно зростало й не обмежувалося, то з часом воно прямувало б до безмежності, що не відповідає дійсності.

Перехідна характеристика (крива 2) спочатку наростає, а після часу $t = T_0$ обмежується на рівні $l \approx 0.4$ і далі не змінюється, бо обмеження абсолютного видовження $l_v = 1$ неминуче спричиняє обмеження відносного видовження згідно з його визначенням ($\varepsilon = \frac{\Delta L}{L_0}$).

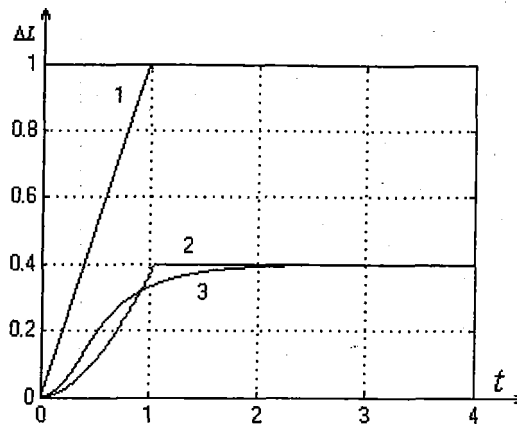


Рис.3. Графіки перехідних характеристик

За час $t = T_0$ відбувається один цикл заміщення стрічки на ділянці з появою приросту швидкості. Рухома стрічка переходить в новий квазістаціонарний режим. Неперервний процес заміщення деформованої стрічки недеформованою приводить до того, що рухома стрічка на ділянці не встигає перейти в стан видовження, поданий кривою 1. Тобто спрацьовує ефект інерції заміщення стрічки. Рухома стрічка, не встигаючи одержати певного видовження, виводиться за межі ділянки.

Швидкість стрічки є функцією часу, тому виникають незручності і труднощі в інтегруванні приростів швидкості на обмеженому інтервалі. У стрічкопровідній системі можуть бути інші елементи, рівняння яких інтегрується на відкритому інтервалі часу $[0, \infty]$. Тому потрібно виконати апроксимацію перехідної характеристики як об'єкта регулювання.

Особливість апроксимації перехідної характеристики ділянки стрічки полягає в тому, що вона обов'язково повинна мати інтегральну на інтервалі складову, інакше втрачається сам метод моделювання ділянки стрічки. Пропонується залишити сам вигляд диференціального рівняння видовження, а тільки змінити його параметри, а саме: замінити границі інтегрування на інтервалі $[0, 0.4T_0]$, що відповідає обмеженню перехідної характеристики на рівні $0.4L_v$, і ввести нову сталу часу ділянки стрічки $T = 0.4T_0$.

Апроксимовані диференціальні рівняння абсолютного видовження (9) та натягу (13) описуватимуться наближеними, але досить точними рівняннями:

$$T \frac{\Delta L}{dt} + \Delta L = \Delta L_0 + \int_0^T (V_2 - V_1 + \Delta V_2) dt;$$

$$T \frac{dF}{dt} + F = F_0 + \frac{E}{L_0} \int_0^T (V_2 - V_1 + \Delta V_2) dt,$$

де стала часу ділянки $T = 0,4T_0$, границі інтегрування приросту швидкості $[0, T]$.

Отже, апроксимація вихідних рівнянь видовження та натягу рухомої стрічки на ділянці є відносно простою і здійснюється формально, шляхом заміни часу проходження стрічки між стрічкопровідними парами T_0 на $T = 0,4T_0$ і границь інтегрування на $[0, T]$.

Апроксимована перехідна характеристика наведена на рис.3 (крива 3). Як бачимо, вона досить наближена до дійсної характеристики. Середня інтегральна похибка апроксимації – 0,028. Виконана апроксимація перехідної характеристики прийнятна для більшості задач моделювання стрічкопровідних систем і розрахунку систем керування ними.

На рис.4 для порівняння зображено перехідні характеристики ділянки стрічки, побудовані на підставі традиційного диференціального рівняння видовження стрічки (крива 1) і запропонованої моделі видовження (крива 2).

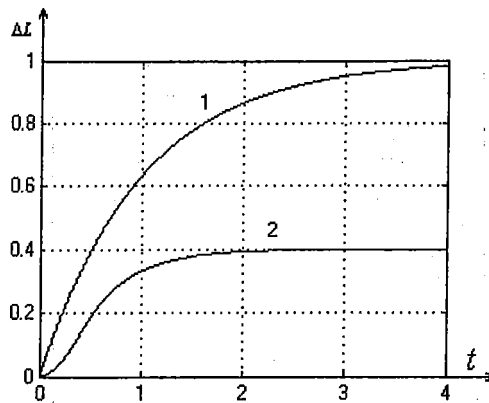


Рис.4. Графіки перехідних характеристик ділянки стрічки

Перехідна характеристика запропонованої моделі значно відрізняється від традиційної, яка є експонентою, являє собою s -подібну криву, близьку до перехідної характеристики інерційної ланки другого порядку. Перехідний процес у традиційній моделі закінчується за час, приблизно рівний $(3\div 5)T_0$, а в запропонованій – за час T_0 . Коефіцієнт передачі ділянки стрічки за швидкістю для усталеного режиму для традиційної моделі $k_v = \Delta L / \Delta V = 1 \text{ м/с}$. Натомість для запропонованої моделі $k_v = 0.4 \text{ м/с}$. Отже, динаміка запропонованої моделі ділянки рухомої стрічки значно відрізняється від динаміки ділянки традиційної моделі. Швидкодія збільшується приблизно в 3–4 рази, коефіцієнт передачі за швидкістю зменшується в 0,4 раза. Це зумовлено квазістаціонарним режимом роботи ділянки рухомої стрічки як об'єкта регулювання.

Таким чином:

1. Існуючі моделі стрічкопровідних систем базуються на підставі диференціального рівняння деформації стрічки, одержаного при певних припущеннях, тому не достатньо повно описують динаміку стрічкопровідної системи, що унеможливило оптимальний синтез і налагодження систем автоматичного управління ними.

2. Побудовано модель деформації та натягу рухомої стрічки, що приводиться в рух двома ведучими парами, де видовження стрічки на ділянці визначається методом інтегрування приросту швидкості на інтервалі $[0, T]$.

3. Одержано аналітичні залежності видовження та натягу рухомої стрічки від збурення швидкості на ділянці.

4. Запропонована модель більш повно й адекватно описує динаміку ділянки рухомої стрічки та є основою для побудови та аналізу більш складних стрічкопровідних систем.

5. Результати комп'ютерного симулювання показали, що перехідна характеристика рекомендованої моделі значно відрізняється від існуючої.

1. Гулятьєв А. Визуальное моделирование в среде MATLAB: Учебный курс. СПб., 2000.
2. Дурняк Б.В. Стрічкопровідні системи ролонних ротаційних машин. Моделювання управління. К., 2002.
3. Избицкий Э.И. Импульсное регулирование движения ленточного материала. М., 1980.
4. Казакевич В.В., Избицкий Э.И. Системы автоматического управления полиграфическими процессами. М., 1978.
5. Митрофанов В.П., Тюрин А.А., Бирбраер Е.Г., Штолянов В.Н. Печатное оборудование. М., 1999.
6. Толстой Г.Д. Автоматизация полиграфических производственных процессов. М., 1970.
7. Тюрин А.А. Печатные машины – автоматы. М., 1980.
8. Чехман Я.И. Печатные аппараты (Основы теории). К., 1989.